

OPTIMIZACIÓN DE DISEÑOS DE PANTALLAS ACÚSTICAS DE PEQUEÑO ESPESOR MEDIANTE LA IMPLEMENTACIÓN DE LA FORMULACIÓN DUAL DEL MEC

Rayco Toledo*, Juan José Aznárez, Orlando Maeso y David Greiner

División de Mecánica de Medios Continuos y Estructuras
Instituto de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería (SIANI)
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria (ULPGC)
Edificio Central del Parque Científico Tecnológico del Campus Universitario de Tafira, 35017
Las Palmas de Gran Canaria, España
e-mail: : rtoledo*, jaznarez, omaeso, dgreiner@iusiani.ulpgc.es, web: <http://www.siani.es>

Keywords: Pantallas Acústicas, Elemento de Contorno, Formulación Dual, Algoritmos Evolutivos, Optimización Eficacia Acústica.

Abstract. *La inclusión de pantallas acústicas supone la estrategia más comúnmente empleada para minimizar los efectos negativos que el ruido de tráfico genera en áreas residenciales. Para poder evaluar su eficacia acústica, el coeficiente de pérdida por inserción (IL) es un buen estimador al determinar la diferencia de niveles de presión sonora en un determinado punto en la situación con y sin barrera. Si bien existen numerosos parámetros que influyen en dicha eficacia, la altura efectiva de la pantalla es la que posee mayor incidencia. Las limitaciones asociadas a este factor obligan a la búsqueda de diseños que encuentren soluciones de compromiso entre su altura efectiva y su eficacia acústica. Estos diseños son a menudo complejos y su implementación en procesos de optimización no resulta sencilla a efectos de determinar su validez topológica. Se propone en esta Ponencia un protocolo de optimización del diseño de pantallas acústicas constituidas por tramos y brazos de pequeño espesor. Establecida la dimensión del problema de los perfiles a considerar y su espacio geométrico, este procedimiento permite encontrar soluciones acústicas interesantes a partir de la maximización del IL para un espectro de ruido determinado. El proceso de búsqueda de los mejores diseños se lleva a cabo mediante el uso conjunto de Algoritmos Evolutivos (AE) y la aplicación de un modelo numérico que implementa la Formulación Dual del Método de los Elementos de Contorno (MEC) [1], lo que permite idealizar las pantallas acústicas como geometrías con espesor nulo, evitando de este modo las dificultades inherentes al empleo de un algoritmo para la generación de geometrías reales de este tipo de pantallas.*

1. INTRODUCCIÓN

La inclusión de pantallas acústicas supone la estrategia más comúnmente empleada para minimizar los efectos negativos que el ruido de tráfico genera en áreas residenciales. Numerosas investigaciones se han llevado a cabo en las dos últimas décadas centradas en la difracción del sonido sobre el contorno de la barrera, más concretamente en la predicción del comportamiento y el desarrollo de diseños más eficientes. De entre los diferentes métodos teóricos propuestos cabe destacar el Método de los Elementos de Contorno (MEC), ya utilizado previamente por los autores de este Trabajo [2] para evaluar configuraciones complejas de pantallas.

Los Algoritmos Evolutivos (AE) han sido ampliamente usados en la Optimización de Diseños de Formas en diferentes campos de la ingeniería. El uso combinado de problemas de optimización empleando AE con un modelo del MEC ha sido aplicado en los últimos años a problemas de diseños de pantallas acústicas en diversos estudios realizados en el seno del instituto donde se desarrolla el presente Trabajo (ver [3, 4]).

Para poder evaluar la eficacia acústica de la pantalla, el coeficiente de pérdida por inserción (por sus siglas en inglés IL: *Insertion Loss*) es un buen estimador al determinar la diferencia de niveles de presión sonora en un determinado punto en la situación con y sin barrera. Si bien existen numerosos parámetros que influyen en dicha eficacia, la altura efectiva de la pantalla es la que posee mayor incidencia. Las limitaciones asociadas a este factor obligan a la búsqueda de diseños que encuentren soluciones de compromiso entre su altura efectiva y su eficacia acústica. Estos diseños son a menudo complejos y su implementación en procesos de optimización no resulta sencilla a efectos de determinar su validez topológica. Este artículo analiza algunos modelos de pantallas, basándose en la optimización de la eficacia acústica de los perfiles de pequeño espesor propuestos por un AE. La particularidad de este tipo de barreras hace que sea necesaria la implementación de una formulación dual en el código MEC empleado en la optimización.

2. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

La Figura 1 muestra la configuración general objeto de estudio. Se trata de un problema bidimensional que presenta una fuente de sonido mono frecuencia, coherente e infinita situada paralelamente a una barrera acústica de pequeño espesor que se encuentra sobre un plano (suelo) de admitancia uniforme a una distancia d_s . Tanto el suelo como la barrera presentan una superficie perfectamente reflejante en este Trabajo ($\beta_g = \beta_b = 0$).

Se define el área de la región factible donde opera la pantalla acústica como una sección trapezoidal, cuyas dimensiones vienen determinadas por la proyección horizontal de la barrera en el suelo, que es constante y $d_p = 1$ m, y la altura máxima efectiva que se permite alcanzar, que es $h_{\text{eff}} = 3$ m en la mediana del trapecio rectángulo.

Se estudia una configuración de cuatro grupos de cuatro receptores situados a distintas distancias de la barrera. El primer grupo yace sobre el suelo, mientras que el resto se dispone en distintas alturas separados Δy . Los receptores de cada grupo, a su vez, están

separados Δx . Se proponen además tres regiones claramente distinguibles en términos de su cercanía a la mediana de la región factible donde se encuentra la pantalla (d_{r1}) y de su extensión (d_{r2}), de modo que la separación entre receptores ($\Delta x, \Delta y$) viene determinada por la región que se pretende analizar (ver Tabla 1).

Tabla 1: *Regiones objeto de estudio. Distancias expresadas en metros.*

Región	d_s	d_p	d_{r1}	d_{r2}	Δx	Δy
1			0.5	10	2	1
2	10	1	10.5	40	8	2
3			50.5	50	10	5

Los resultados obtenidos están dados en términos del *coeficiente de pérdida por inserción* (IL por sus siglas en inglés), definido como sigue:

$$IL = -20 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_B}{P_{HS}} \right) \text{ (dB)} \quad (1)$$

para cada frecuencia del espectro, y representa el nivel de presión sonora en los receptores medido como la diferencia entre la situación considerando (P_B) y sin considerar (P_{HS}) la inclusión de la barrera. Se trata de un estimador ampliamente utilizado para evaluar la eficacia acústica de las barreras.

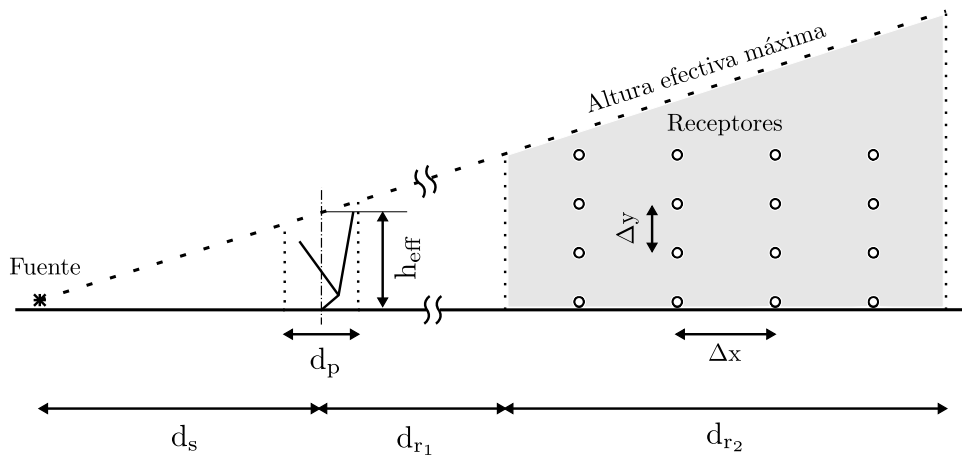


Figura 1: *Configuración bidimensional para pantallas acústicas de pequeño espesor.*

3. FORMULACIÓN DUAL DEL MEC EN PANTALLAS ACÚSTICAS DE PEQUEÑO ESPESOR

3.1. Formulación singular del MEC

La ecuación integral para el punto del contorno i a ser resuelta numéricamente mediante la formulación singular del MEC puede ser expresada como sigue:

$$c_i p_i + \oint_{\Gamma_b} p \frac{\partial p^*}{\partial n_j} d\Gamma = p_0^* + \int_{\Gamma_b} \frac{\partial p}{\partial n_j} p^* d\Gamma \quad (2)$$

Esta expresión se trata de una igualdad integral que implica únicamente al contorno de la barrera que se pretende estudiar. El símbolo \oint representa la integral en el contorno que debe ser entendida en el sentido del valor principal de Cauchy, una vez ha sido extraída la singularidad en torno al punto de colocación i (ya recogida en c_i). En la expresión (2), p es el campo de presión acústica en la superficie de la barrera y p^* la solución fundamental del semiespacio (campo de presión acústica debido al posicionamiento de la fuente en el punto de colocación i sobre un plano de admitancia β_g (admitancia del suelo)) y c_i es el término libre. En general: $c_i = \theta/2\pi$, donde θ representa el ángulo interior al contorno medido en radianes. Si el contorno es suave se demuestra fácilmente que $c_i = 1/2$.

Para un suelo reflejante, las expresiones de la solución fundamental y su derivada para problemas armónicos bidimensionales son las siguientes:

$$p^*(k, r) = \frac{1}{2\pi} [K_0(ikr) + K_0(ik\bar{r})] \quad (3)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial n} = -\frac{ik}{2\pi} \left[K_1(ikr) \frac{\partial r}{\partial n} + K_1(ik\bar{r}) \frac{\partial \bar{r}}{\partial n} \right]$$

siendo i la unidad imaginaria, k el número de onda, r y \bar{r} las distancias desde el punto fuente y el punto imagen al punto de observación respectivamente, y K_0 y K_1 las funciones modificadas de Bessel de segunda especie de orden 0 y 1 respectivamente.

Discretizando el contorno de la pantalla, de la aplicación de (2) se obtiene un sistema de ecuaciones que permite obtener los valores de la presión acústica en la superficie de la misma. El código MEC empleado en este artículo hace uso de elementos cuadráticos de tres nodos, tanto para la definición del contorno como para la definición de la presión en el interior del elemento. De este modo, tras el proceso de discretización mencionado, se obtienen los núcleos de integración de la solución fundamental de la formulación singular del MEC:

$$h_k^{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial p^*}{\partial n_j} \phi_k d\Gamma_j \quad ; \quad g_k^{ij} = \int_{\Gamma_j} p^* \phi_k d\Gamma_j \quad (4)$$

que se corresponden con las integrales a lo largo del elemento j calculadas mediante cuadratura gaussiana estándar.

3.2. Formulación hipersingular del MEC

La ecuación integral para el punto del contorno i a ser resuelta numéricamente mediante la formulación hipersingular del MEC puede ser escrita como sigue:

$$c_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial n_i} \right) + \oint_{\Gamma} p \frac{\partial^2 p^*}{\partial n_i \partial n_j} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial p^*}{\partial n_i} \frac{\partial p}{\partial n_j} d\Gamma + \frac{\partial p_0^*}{\partial n_i} \quad (5)$$

donde el símbolo \oint_{Γ} representa la integral en el sentido de la parte finita de Hadamard y \int_{Γ} la integral en el sentido del valor principal de Cauchy. Por otro lado, la formulación hipersingular del Método requiere que la colocación de la fuente (punto de colocación i) sea interior al elemento (colocación no nodal) (ver (A.2)). De esta manera, en (5) se verifica que $c_i = 1/2$.

La expresión (6) muestra el valor de la solución fundamental empleada así como su flujo para la formulación hipersingular:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^*}{\partial n_i} &= -\frac{ik}{2\pi} \cdot K_1(ikr) \frac{\partial r}{\partial n_i} \\ \frac{\partial^2 p^*}{\partial n_i \partial n_j} &= -\frac{ik}{2\pi} \cdot \left[ik \cdot K_2(ikr) \cdot \frac{\partial r}{\partial n_i} \frac{\partial r}{\partial n_j} - \frac{1}{r} \cdot K_1(ikr) \cdot (n_i \cdot n_j) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

Análogamente a (3), i es la unidad imaginaria, k el número de onda y r la distancia desde el punto colocación al punto de integración. Por otro lado, K_1 y K_2 representan las funciones modificadas de Bessel de segunda especie de orden 1 y 2 respectivamente, y n_i y n_j las normales al contorno en el punto de colocación e integración respectivamente.

La solución numérica de (5) es posible tras discretizar el contorno, a partir del cual se obtienen los núcleos de integración de la formulación hipersingular del MEC para nodo de colocación i e integrado sobre elemento j :

$$m_k^{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial^2 p^*}{\partial n_i \partial n_j} \phi_k d\Gamma_j \quad ; \quad l_k^{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial p^*}{\partial n_i} \phi_k d\Gamma_j \quad (7)$$

La resolución numérica de estas integrales merece un tratamiento más detallado (ver apéndice A).

3.3. Formulación dual del MEC

La Figura 2(a) representa un perfil genérico de pantalla acústica de pequeño espesor a ser tratado mediante la formulación dual del MEC. Tras el proceso de discretización, cada nodo alberga los valores correspondientes de presión y flujo con respecto a la normal del contorno, es decir, los valores a la izquierda y a la derecha de acuerdo con la dirección de recorrido del mismo (p^+ , q^+ y p^- , q^- de aquí en adelante).

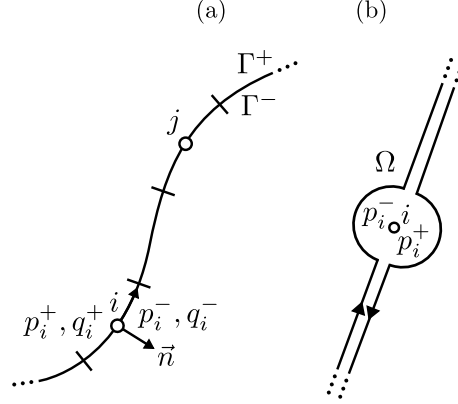


Figura 2: (a) Perfil genérico de pantalla de pequeño espesor. (b) Estrategia empleada para evitar la singularidad en el entorno del punto de colocación de la carga en la formulación del MEC.

En la Figura 2(b) se puede visualizar la estrategia para aislar la singularidad del Método en este tipo de dominios. De este modo, la igualdad matricial resultante de aplicar la formulación singular del MEC a pantallas de pequeño espesor puede ser expresada como sigue:

$$\mathbf{c}_i (\mathbf{p}_i^+ + \mathbf{p}_i^-) + \sum_{j=1}^N (\mathbf{H}_j^+ \mathbf{p}_j^+ + \mathbf{H}_j^- \mathbf{p}_j^-) = \sum_{j=1}^N (\mathbf{G}_j^+ \mathbf{q}_j^+ + \mathbf{G}_j^- \mathbf{q}_j^-) \quad (8)$$

siendo N el número total de nodos de la discretización sobre el contorno. Teniendo en cuenta que $n^+ = -n^-$ en el punto de colocación j , se demuestra fácilmente que:

$$\mathbf{H}_j^+ = -\mathbf{H}_j^- \quad ; \quad \mathbf{G}_j^+ = \mathbf{G}_j^- \quad (9)$$

Para fuentes internas de ruido y contornos suaves, la expresión final puede ser escrita como sigue (ver [1]):

$$\frac{1}{2} \cdot \Sigma \mathbf{p}_i + \sum_{j=1}^N \mathbf{H}_j^+ \cdot \Delta \mathbf{p}_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}_j^+ \cdot \Sigma \mathbf{q}_j + \mathbf{p}_0^* \quad (10)$$

donde:

$$\Sigma \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i^+ + \mathbf{p}_i^- \quad ; \quad \Delta \mathbf{p}_j = \mathbf{p}_j^+ - \mathbf{p}_j^- \quad ; \quad \Sigma \mathbf{q}_j = \mathbf{q}_j^+ + \mathbf{q}_j^- \quad (11)$$

Derivando (8) respecto de n_i^+ se obtiene la igualdad integral de la formulación hiper-singular del MEC:

$$\mathbf{c}_i \left(\frac{\partial \mathbf{p}_i^+}{\partial \mathbf{n}_i^+} + \frac{\partial \mathbf{p}_i^-}{\partial \mathbf{n}_i^+} \right) + \sum_{j=1}^N (\mathbf{M}_j^+ \mathbf{p}_j^+ + \mathbf{M}_j^- \mathbf{p}_j^-) = \sum_{j=1}^N (\mathbf{L}_j^+ \mathbf{q}_j^+ + \mathbf{L}_j^- \mathbf{q}_j^-) \quad (12)$$

donde:

$$\frac{\partial \mathbf{p}_i^-}{\partial \mathbf{n}_i^+} = -\mathbf{q}_i \quad ; \quad \mathbf{M}_j^+ = -\mathbf{M}_j^- \quad ; \quad \mathbf{L}_j^+ = \mathbf{L}_j^- \quad (13)$$

La formulación hipersingular del Método requiere que el punto de colocación i sea interior al elemento (ver A.2), lo que garantiza que el ángulo interior al contorno en dicho punto sea siempre $\theta = \pi$. Así, para fuentes internas de ruido la expresión final puede ser formulada como sigue:

$$\frac{1}{2} \cdot \Delta \mathbf{q}_i + \sum_{j=1}^N \mathbf{M}_j^+ \cdot \Delta \mathbf{p}_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{L}_j^+ \cdot \Sigma \mathbf{q}_j + \frac{\partial \mathbf{p}_0^*}{\partial \mathbf{n}_i} \quad (14)$$

siendo:

$$\Delta q_j = -ik\beta^+ p_j^+ + ik\beta^- p_j^- \quad ; \quad \Sigma q_j = -ik\beta^+ p_j^+ - ik\beta^- p_j^- \quad (15)$$

Tras algunas operaciones, (15) puede ser escrita como sigue:

$$\Delta q_j = \mathbf{A}^- \cdot \Sigma p_j + \mathbf{A}^+ \cdot \Delta p_j \quad ; \quad \Sigma q_j = \mathbf{A}^+ \cdot \Sigma p_j + \mathbf{A}^- \cdot \Delta p_j \quad (16)$$

siendo:

$$\mathbf{A}^+ = -(1/2) ik (\beta^+ + \beta^-) \quad ; \quad \mathbf{A}^- = -(1/2) ik (\beta^+ - \beta^-) \quad (17)$$

Sustituyendo (16) en (10) y (14) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma \mathbf{p}_i + \sum_{j=1}^N \mathbf{H}_j^+ \Delta \mathbf{p}_j &= \sum_{j=1}^N \mathbf{G}_j^+ (\mathbf{A}^+ \Sigma \mathbf{p}_j + \mathbf{A}^- \Delta \mathbf{p}_j) + \mathbf{p}_0^* \\ \frac{1}{2} (\mathbf{A}^- \Sigma \mathbf{p}_i + \mathbf{A}^+ \Delta \mathbf{p}_i) + \sum_{j=1}^N \mathbf{M}_j^+ \Delta \mathbf{p}_j &= \sum_{j=1}^N \mathbf{L}_j^+ (\mathbf{A}^+ \Sigma \mathbf{p}_j + \mathbf{A}^- \Delta \mathbf{p}_j) + \frac{\partial \mathbf{p}_0^*}{\partial \mathbf{n}_i} \end{aligned} \quad (18)$$

Que se corresponden con las expresiones finales una vez aplicadas la formulación singular e hipersingular del MEC al contorno de una pantalla de pequeño espesor. Así, (18) puede ser expresado matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{I}}{2} - \mathbf{G}^+ \mathbf{A}^+ & \mathbf{H}^+ - \mathbf{G}^+ \mathbf{A}^- \\ \frac{\mathbf{A}^-}{2} \mathbf{I} - \mathbf{L}^+ \mathbf{A}^+ & \frac{\mathbf{A}^+}{2} \mathbf{I} + \mathbf{M}^+ - \mathbf{L}^+ \mathbf{A}^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma \mathbf{p} \\ \Delta \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_o^* \\ \frac{\partial \mathbf{p}_o^*}{\partial \mathbf{n}_i^+} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Para los casos en los que los contornos de la barrera son absorbentes y de idéntico valor a ambos lados del perfil ($\beta^+ = \beta^-$), (19) pasa a ser:

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{I}}{2} - \mathbf{G}^+ \mathbf{A}^+ & \mathbf{H} \\ -\mathbf{L}^+ \mathbf{A}^+ & \frac{\mathbf{A}^+}{2} \mathbf{I} + \mathbf{M}^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma \mathbf{p} \\ \Delta \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_o^* \\ \frac{\partial \mathbf{p}_o^*}{\partial \mathbf{n}_i^+} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Dando lugar a un sistema independiente de ecuaciones lineales de dimensión $2N \times 2N$, siendo N el número total de nodos sobre el contorno.

Para los casos en los que los contornos son perfectamente rígidos ($\beta^+ = \beta^- = 0$), que son los de aplicabilidad en este Trabajo, (14) conduce a una expresión donde $\Delta \mathbf{p}_j$ se obtiene de manera directa:

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{M}_j^+ \cdot \Delta \mathbf{p}_j = \frac{\partial \mathbf{p}_o^*}{\partial \mathbf{n}_i} \quad (21)$$

Sustituyendo (21) en (10) se obtiene $\Sigma \mathbf{p}_i$ y, por tanto, p^+ and p^- en cada nodo. En este caso se plantean dos sistemas independientes de ecuaciones lineales de dimensión $N \times N$, dando lugar a una mayor rapidez de los tiempos de cálculo respecto de los casos anteriores.

4. METODOLOGÍA

4.1. Optimización de formas

La optimización de formas se lleva a cabo mediante el acoplamiento de un algoritmo evolutivo (AE) y la formulación dual del MEC. El software empleado para el AE en este Trabajo utiliza el paquete GALIB [5]. Esta librería es una colección de componentes de algoritmos genéticos escritos en lenguaje C++ a partir de la cual es posible construir rápidamente y con facilidad AG's para abordar una amplia variedad de problemas.

Los algoritmos de estado estacionario fueron propuestos a finales de los ochenta [6] obteniendo buenos resultados, al mejorar los algoritmos evolutivos generacionales empleados hasta entonces en muchas aplicaciones con funciones de ajuste no dinámicas.

Se hace uso en este artículo de un AE de estado estacionario que posibilita el reemplazo de los dos peores individuos (en términos de su función de ajuste) en cada generación, comprendida por un total de 100 individuos. Se implementa el operador de cruce de un punto, con una probabilidad de 0.9. La probabilidad de mutación considerada es igual a $1/n_{\text{ch}}$, siendo n_{ch} la longitud total del cromosoma ($n_{\text{ch}} = 8xn$, donde n es el número de variables de diseño, cada una con una precisión de 8 bits). Se consideran cinco ejecuciones del proceso de optimización independientes para cada modelo de pantalla. Por último, la condición de parada del proceso se alcanza para 20,000 evaluaciones de la función de ajuste (FA).

Siguiendo [4, 7], se considera un dominio transformado para facilitar el proceso de optimización. Este dominio alberga el conjunto de variables de diseño del modelo objeto de estudio, denotado por (ξ_i, η_i) , y representa el área rectangular del espacio de búsqueda para el AE (ver Figura 3(a)). Cada punto (ξ_i, η_i) en el dominio transformado tiene su imagen (x_i, y_i) en el dominio Cartesiano, que es el espacio real donde opera la pantalla. De los numerosos parámetros que influyen en la eficacia de la pantalla, su altura efectiva (h_{eff}) es la que posee mayor incidencia. Las limitaciones asociadas a este factor obligan a la búsqueda de diseños que encuentren soluciones de compromiso entre la altura efectiva de una pantalla y su eficacia acústica. Se propone como límite en este artículo una $h_{\text{eff}} = 3m$, lo que genera un espacio de búsqueda trapezoidal en el dominio Cartesiano de la barrera (Figura 3(b)).

La transformación de la Figura 3 se puede expresar como sigue:

$$\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} = \phi_1(\xi_i, \eta_i) \begin{Bmatrix} x_1^m \\ y_1^m \end{Bmatrix} + \phi_2(\xi_i, \eta_i) \begin{Bmatrix} x_2^m \\ y_2^m \end{Bmatrix} + \phi_3(\xi_i, \eta_i) \begin{Bmatrix} x_3^m \\ y_3^m \end{Bmatrix} + \phi_4(\xi_i, \eta_i) \begin{Bmatrix} x_4^m \\ y_4^m \end{Bmatrix} \quad (22)$$

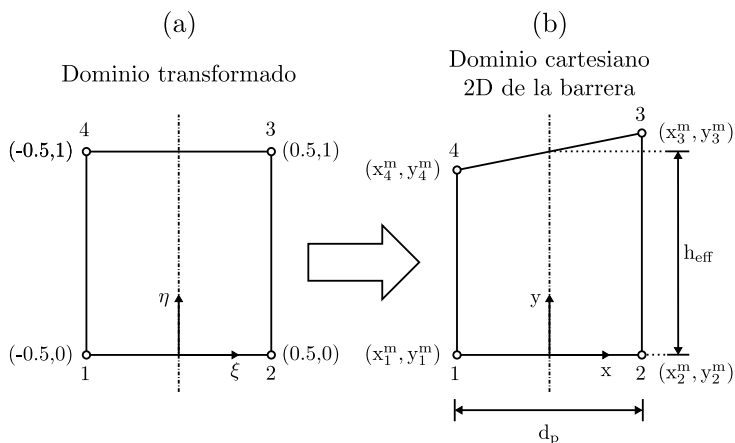


Figura 3: *Sistemas coordenados bidimensionales.*

siendo:

$$\phi_1 = \left(\frac{1}{2} - \xi\right)(1 - \eta); \phi_2 = \left(\frac{1}{2} + \xi\right)(1 - \eta); \phi_3 = \eta\left(\frac{1}{2} + \xi\right); \phi_4 = \eta\left(\frac{1}{2} - \xi\right) \quad (23)$$

donde se demuestra fácilmente que:

$$x_1^m = x_4^m = -\frac{d_p}{2}; x_2^m = x_3^m = \frac{d_p}{2}; y_3^m = h_{\text{eff}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d_p}{d_s}\right); y_4^m = h_{\text{eff}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{d_p}{d_s}\right) \quad (24)$$

siendo y_1^m y y_2^m valores que dependen del modelo analizado (ver Tabla 2).

Se estudian en este Trabajo dos modelos de pantallas acústicas (Figura 4). El punto que yace en el suelo (0) es fijo, y tanto la proyección horizontal (d_p) como la altura efectiva (h_{eff}) son idénticas en ambos modelos. El modelo A se trata de una configuración en Y ampliamente estudiada, generada a partir de tres puntos (1, 2 y 3) que disponen de completa libertad de movimiento en el interior de la región factible. El modelo B representa una evolución del modelo anterior al incorporar dos brazos adicionales a cada brazo de la configuración en Y. Uno de estos brazos se sitúa en el punto medio de los brazos principales de la barrera, mientras que el otro lo hace en el extremo. Las variables de diseño que definen la inclinación de los brazos principales tienen su movilidad condicionada a desplazamientos verticales (η_1 y η_6) a lo largo de los límites laterales de la región factible. La Tabla 2 muestra las variables de diseño y las restricciones impuestas a cada modelo.

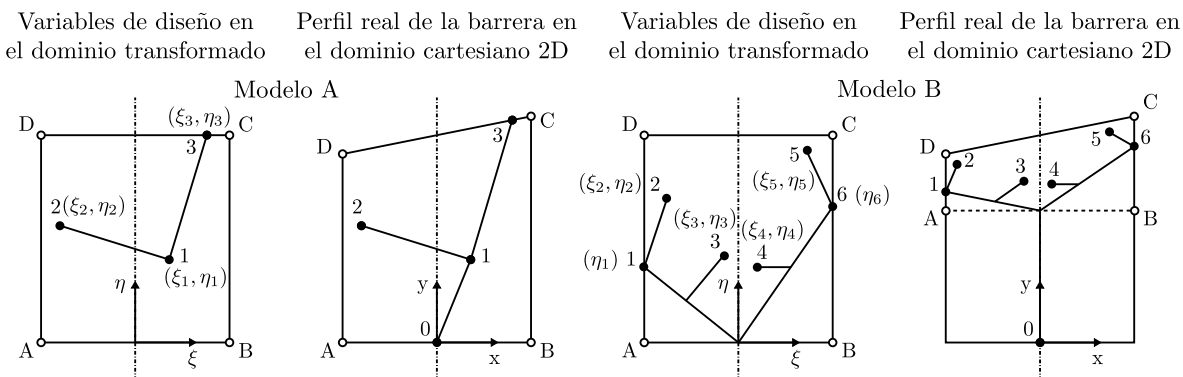


Figura 4: Variables de diseño y perfiles de los modelos que se estudian.

Tabla 2: Variables de diseño y restricciones de los modelos a estudiar.

Modelo	y_1^m (m)	y_2^m (m)	Variables de diseño	Restricciones
A	0.0	0.0	$\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \xi_3, \eta_3$	Ninguna (región factible)
B	2.5	2.5	$\eta_1, \xi_2, \eta_2, \xi_3, \eta_3, \xi_4, \eta_4, \xi_5, \eta_5, \eta_6$	Evitar cortes entre los contornos de la barrera

4.2. Estimación de la pérdida por inserción

Considerar el valor de IL asociado al espectro de banda de frecuencia para cada receptor resulta ser un estimador más realista a la hora de evaluar la eficacia de una pantalla acústica. De este modo, (25) representa el valor promedio del IL frecuencial para cada receptor.

$$\overline{IL} = -10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\sum_{i=1}^{NF} 10^{(A_i - IL_i)/10}}{\sum_{i=1}^{NF} 10^{A_i/10}} \right) \text{ (dBA)} \quad (25)$$

donde NF se trata del número de frecuencias del espectro analizado (NF = 14 en este artículo), A_i es el nivel de ruido ponderado del espectro e IL_i es el coeficiente de pérdida por inserción para fuentes pulsando a cada una de las frecuencias del mismo. El espectro empleado en este Trabajo se corresponde con el espectro normalizado de ruido de automóviles, ponderado A, empleado por el Código Técnico de la Edificación (CTE) (ISO 717.2), definido para frecuencias centrales de tercio de octava en el rango de 100 a 2000 Hz [8].

4.3. Definición de la función de ajuste

La optimización de forma se lleva a cabo basándose exclusivamente en la media de los valores de IL para todos los receptores analizados (26).

$$FA = \sum_{i=1}^{NR} \overline{IL}_i / NR \quad (26)$$

siendo \overline{IL}_j el valor promedio de IL para cada receptor y NR el número total de receptores. Como es fácil entender a estas alturas esta función buscará ser maximizada en el proceso de optimización, de manera que cuanto mayor sea su valor mayor será la eficacia acústica de la barrera.

5. Resultados y discusión

La Tabla 3 muestra los valores de la eficacia acústica de los mejores individuos (FA_{mejor}) de las ejecuciones llevadas a cabo para cada región y modelo así como la longitud de los contornos de cada caso (L_c). Asimismo, recoge los resultados comparativos de la ganancia de eficacia acústica del mejor individuo de cada modelo, respecto de una pantalla simple de 3 m de altura situada en la mediana del área de la región factible para cada región (ΔFA_{mejor}). Además se incluyen los resultados relativos al modelo B*, el cual tiene como contornos el pie y los brazos principales del modelo B (ver Figura 4). Se pretende de este

modo determinar cuál es la pérdida de eficacia acústica asociada a la eliminación de los contornos interiores de este modelo.

La Figura 5 muestra los perfiles de los mejores individuos de los modelos estudiados, en términos de su eficacia acústica, así como la evolución del IL frecuencial promedio de todos los receptores con la frecuencia en cada una de las regiones consideradas y para cada modelo estudiado. Por último, la Tabla 4 muestra las coordenadas de las variables de diseño de los mejores individuos para cada región y modelo.

Tabla 3: *Eficacia acústica de los modelos analizados, expresada en dBA.*

Región	Modelo	L_c (m)	ΔL_c (m)	FA_{mejor}	ΔFA_{mejor}
1	B	4.8052	+1.8052	21.3830	+6.8418
	A	5.8848	+2.8848	19.2943	+4.7531
	B*	3.7398	+0.7398	17.4048	+2.8636
2	B	4.8050	+1.4805	17.4996	+4.0581
	A	5.8969	+2.8969	16.6120	+3.1705
	B*	3.6790	+0.6790	13.4767	+0.0352
3	B	4.9896	+1.9896	16.2552	+3.4976
	A	5.8984	+2.8984	15.4795	+2.7219
	B*	3.6296	+0.6296	12.7967	+0.0391

Tabla 4: *Coordenadas en el dominio transformado del mejor individuo para cada región y modelo.*

Variable	Región 1		Región 2		Región 3	
	A	B	A	B	A	B
ξ_1	0.12353	-	-0.12745	-	-0.17450	-
η_1	0.05882	1.00000	0.05882	0.05882	0.05098	1.00000
ξ_2	-0.30784	-0.28205	0.44510	-0.45500	-0.43726	-0.27500
η_2	1.00000	1.00000	0.98039	1.00000	1.00000	1.00000
ξ_3	0.50000	-0.20147	-0.36275	-0.22500	0.36667	-0.17716
η_3	0.96471	1.00000	1.00000	0.77647	0.97647	0.96471
ξ_4	-	0.15363	-	0.09951	-	0.04931
η_4	-	0.88628	-	0.87843	-	0.93726
ξ_5	-	0.27500	-	0.32971	-	0.48941
η_5	-	0.88235	-	0.82353	-	0.83529
η_6	-	0.58823	-	0.70588	-	0.21569

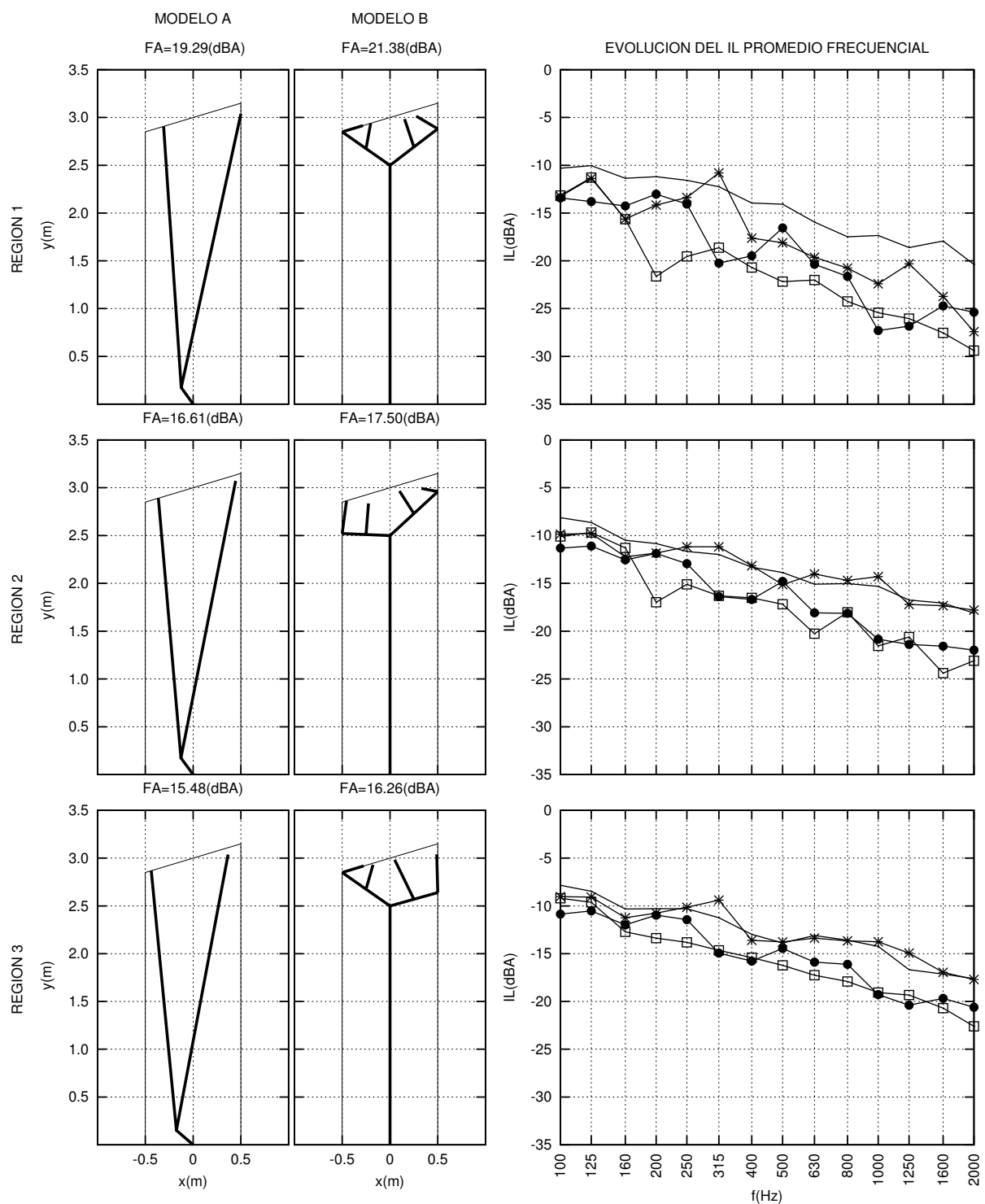


Figura 5: Izquierda, perfiles de los mejores individuos para cada modelo y región. Derecha, evolución del IL promedio frecuencial para los modelos A (—●—), B (—□—), B* (—*—) y pantalla simple de 3 m de altura (línea continua).

A la vista de los resultados de los casos estudiados se realiza el siguiente análisis:

- En consonancia con los trabajos de otros autores (ver [9], [10]) resulta más efectivo actuar (modificar la geometría) en la zona de coronación de la pantalla, dificultando de este modo la fracción de onda difractada. Prueba de ello es el modelo B, que es el que presenta una mejor eficacia acústica en todas las regiones estudiadas.
- El comportamiento acústico de la pantalla es menos sensible al modelo objeto de estudio a medida que los receptores se alejan de la barrera. Sin embargo, del análisis comparativo de los modelos propuestos con la pantalla simple se justifica la necesidad de estudiar perfiles alternativos a ésta, con el fin de minimizar el impacto acústico incluso en zonas alejadas de la barrera.
- Del estudio de los modelos B y B* se desprende que la eliminación de los contornos que nacen de los brazos principales afecta significativamente a la eficacia de la barrera, si bien la altura efectiva de las configuraciones de ambos modelos son similares (véase regiones 1 y 3). Este análisis adquiere aún más relevancia en zonas alejadas donde el modelo B* y la pantalla simple presentan comportamientos acústicos semejantes (véase regiones 2 y 3), justificando de este modo la estrategia geométrica adoptada en el modelo B.

6. Conclusiones

Se ha presentado en este Trabajo un protocolo para la optimización de perfiles que posibilita la idealización de pantallas acústicas reales como geometrías de espesor nulo. Este procedimiento ha sido estudiado en dos modelos específicos de barreras, si bien su rango de aplicabilidad es amplio y permite considerar diversas y complejas soluciones topológicas, incluidas aquellas cuyos diseños están basados en geometrías curvas (curvas de Bézier o curvas spline, entre otras).

La versatilidad y flexibilidad del algoritmo encargado de la generación de las geometrías, hace que la construcción de diseños complejos de barreras se realice de manera sencilla. Esto supone una ventaja considerable frente a la generación de geometrías de pantallas reales, donde el proceso encargado de determinar la validez topológica de los individuos propuestos por un AE resulta complejo y exige, frecuentemente, considerar diversas situaciones particulares (intersección de contornos asociados al espesor de los brazos con la línea que define la altura efectiva, restricciones asociadas a las conectividades entre contornos que parten desde un punto común de la pantalla, etc.). Del análisis de los resultados, se concluye que se observan mejoras asociadas a geometrías que, de no ser por procedimientos como el presentado en este Trabajo, resultarían difíciles de obtener.

Agradecimientos

El presente Trabajo está vinculado al proyecto de investigación BIA 2010-21399-C02-01, financiado por la Subdirección General de Proyectos de Investigación (MICINN) y FEDER, así como el proyecto ProID20100224 financiado por la Agencia Canaria de Investigación e Innovación y Sociedad de la Información (ACIISI) del Gobierno de Canarias y FEDER. Por otra parte, Rayco Toledo es beneficiario del Subprograma de Ayudas Predoctorales de Formación de Personal Investigador (FPI-MICINN), financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España. Los autores agradecen este apoyo.

A. ASPECTOS NUMÉRICOS DE LA FORMULACIÓN DUAL DEL MEC

En este Anejo se aborda de forma resumida el tratamiento numérico de los núcleos de integración implicados en la formulación dual del MEC 2D utilizado en este Trabajo.

A.1. Formulación singular

Se muestran a continuación las integrales de la solución fundamental singular:

$$GW = \int_{\Gamma_e} \phi \cdot p^* \cdot d\Gamma_e = \int_{\Gamma_e} \phi \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \cdot K_0(ikr) \right) \cdot d\Gamma_e \quad (27)$$

$$HW = \int_{\Gamma_e} \phi \cdot \frac{\partial p^*}{\partial n_j} \cdot d\Gamma_e = \int_{\Gamma_e} \phi \cdot \left(-\frac{ik}{2\pi} \cdot K_1(ikr) \cdot \frac{\partial r}{\partial n_j} \right) \cdot d\Gamma_e \quad (28)$$

Esta expresión presenta un término de orden $O(r) = \partial r / \partial n$ y otro de orden $O(1/r) = K_1(ikr)$. Por tanto, se trata de una integral regular que puede ser resuelta numéricamente aplicando cuadratura gaussiana estándar.

La expresión (27) requiere de un protocolo de regularización. La función modificada de Bessel K_0 posee la siguiente expresión:

$$K_0(ikr) = -\ln \left(\frac{ikr}{2} \right) - \gamma + O(ikr) \quad (29)$$

donde $\gamma = 0,5777215664$ es la constante de Euler. De este modo, operando convenientemente sobre (27) GW queda dividida en dos subintegrandos, uno regular (I_{SR}) y otro que requiere ser tratado (I_{SH}):

$$GW = I_{SR} + I_{SH} \quad (30)$$

$$I_{SR} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} [-\gamma + \ln(2) - \ln(ik)] \cdot \phi \cdot d\Gamma \quad (31)$$

$$I_{SH} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln(r) \cdot \phi \cdot d\Gamma \quad (32)$$

Sumando y restando el valor de la función de forma en el punto de colocación ϕ^i a la expresión (32), ésta puede igualmente separarse en un subintegrando regular (I_{SH1}) y otro que aún exige tratamiento (I_{SH2}):

$$I_{SH} = I_{SH1} + I_{SH2} \quad (33)$$

$$I_{SH1} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln(r) \cdot (\phi - \phi^i) \cdot d\Gamma \quad (34)$$

$$I_{SH2} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln(r) \cdot \phi^i \cdot d\Gamma \quad (35)$$

$$(36)$$

Por último, basta con adoptar la estrategia oportuna sobre (35) para completar el proceso de regularización del núcleo de integración GW:

$$I_{SH2} = I_{SH21} + I_{SH22} \quad (37)$$

$$I_{SH21} = -\frac{\phi^i}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln(r) \cdot \left[\frac{d\Gamma}{dr} - \text{signo} \left(\frac{d\Gamma}{dr} \right) \right] \cdot dr \quad (38)$$

$$I_{SH22} = -\frac{\phi^i}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln(r) \cdot \text{signo} \left(\frac{d\Gamma}{dr} \right) \cdot dr \quad (39)$$

De este modo, (38) se convierte en una integral regular que puede ser resuelta mediante cuadratura gaussiana y (39) se trata de una integral que tiene solución analítica, cuyo resultado depende del punto de colocación de la carga.

A.2. Formulación hipersingular

Siguiendo la misma estrategia para tratar la singularidad que en el caso de la formulación estándar, puede escribirse:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial n_i} + \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} M(i, j) p d\Gamma + \lim_{\Gamma_\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} M^e(i, j) p d\Gamma_\varepsilon = \\ \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} L(i, j) \frac{\partial p}{\partial n_j} d\Gamma_\varepsilon + \lim_{\Gamma_\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} L^e(i, j) \frac{\partial p}{\partial n_j} d\Gamma_\varepsilon + L(0, i) \end{aligned} \quad (40)$$

Expresando el campo de presiones p en Γ_ε como un desarrollo en serie de Taylor (condición de Hölder), se llega a las siguientes expresiones de las soluciones estáticas:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} M^e(i, j) p d\Gamma_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_0^\pi \text{sen}\theta p d\theta = -\frac{1}{4} p_2^{\prime i} - \frac{p_i}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \quad (41)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} L^e(i, j) \frac{\partial p}{\partial n_j} d\Gamma_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \text{sen}\theta \frac{\partial p}{\partial n_j} d\theta = \frac{1}{4} p_2^{\prime i} \quad (42)$$

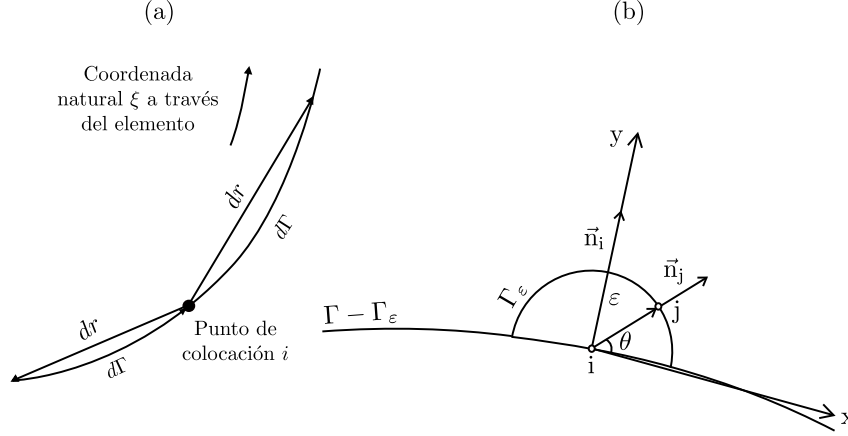


Figura 6: (a) Geometría del elemento en torno al punto de colocación [11]. (b) Igualdad integral en el contorno de la barrera.

Como se verá más adelante, el tratamiento de $\int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} M(i, j) \cdot p \cdot d\Gamma$ conduce a un término del mismo orden de singularidad que permite la cancelación del término impropio de (41). Por tanto, se concluye que el único subintegrando relevante de dicha expresión es el que implica a su parte finita.

$$c_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial n_i} \right) + \oint_{\Gamma} M(i, j) p d\Gamma = \oint_{\Gamma} L(i, j) \frac{\partial p}{\partial n_j} d\Gamma + L(0, i) \quad (43)$$

donde el símbolo \oint_{Γ} representa la integral de la parte finita de Hadamard y \int_{Γ} la integral en el sentido del valor principal de Cauchy. El término libre es $c_i = 1/2$ en este caso, tal y como ha quedado demostrado en las expresiones anteriores.

Se muestran a continuación las integrales de la solución fundamental hipersingular:

$$MW = \int_{\Gamma_\epsilon} \phi \cdot \frac{\partial^2 p^*}{\partial n_i \partial n_j} \cdot d\Gamma_\epsilon \quad (44)$$

$$= \int_{\Gamma_\epsilon} \phi \cdot \left(\frac{ik}{2\pi} \cdot \left[ik \cdot K_2(ikr) \cdot \frac{\partial r}{\partial n_i} \frac{\partial r}{\partial n_j} + \frac{1}{r} \cdot K_1(ikr) \cdot (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j) \right] \right) \cdot d\Gamma_\epsilon$$

$$LW = \int_{\Gamma_\epsilon} \phi \cdot \frac{\partial p^*}{\partial n_i} \cdot d\Gamma_\epsilon = \int_{\Gamma_\epsilon} \phi \cdot \left(-\frac{ik}{2\pi} \cdot K_1(ikr) \frac{\partial r}{\partial n_i} \right) \cdot d\Gamma_\epsilon \quad (45)$$

La integral a lo largo de Γ_ϵ de la expresión (45), análogamente a (28), conduce a una integral regular que puede ser resuelta mediante cuadratura gaussiana estándar. La integral de la expresión (44) requiere de un tratamiento especial. Ésta puede ser dividida

en dos términos que conducen a una expresión integral regular (I_R) y otra hipersingular (I_H):

$$\text{MW} = \frac{1}{2\pi} \cdot (I_R + I_H) \quad (46)$$

$$I_R = \int_{\Gamma_\varepsilon} (ik)^2 \cdot K_2(ikr) \cdot \frac{\partial r}{\partial n_i} \frac{\partial r}{\partial n_j} \cdot \phi \cdot d\Gamma_\varepsilon \quad (47)$$

$$I_H = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{ik}{r} \cdot K_1(ikr) \cdot (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j) \cdot \phi \cdot d\Gamma_\varepsilon \quad (48)$$

La expresión (47) presenta términos de orden $O(1/r^2) = K_2(ikr)$, $O(r) = \partial r/\partial n_i$ y $O(r) = \partial r/\partial n_j$ por lo que se trata de un integrando regular a ser resuelto mediante cuadratura gaussiana estándar. La integral (48) exige un tratamiento particular. Separando dicha integral en tres subintegrales se tiene, tras algunas operaciones:

$$I_H = I_{H1} + I_{H2} + I_{H3}$$

$$I_{H1} = (ik)^2 \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[\frac{K_1(ikr)}{ikr} - \frac{1}{(ikr)^2} - \left(\frac{1}{2}\right) \ln(r) \right] (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j) \cdot \phi \cdot d\Gamma_\varepsilon \quad (49)$$

$$I_{H2} = (ik)^2 \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{(ikr)^2} \cdot (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j) \cdot \phi \cdot d\Gamma_\varepsilon \quad (50)$$

$$I_{H3} = \frac{1}{2} \cdot (ik)^2 \int_{\Gamma_\varepsilon} \ln(r) \cdot (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j) \cdot \phi \cdot d\Gamma_\varepsilon \quad (51)$$

Descomponiendo (49) en dos subintegrales y tras operar convenientemente se tiene:

$$I_{H1} = I_{H11} + I_{H12}$$

$$I_{H11} = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{r^2} \cdot \left(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j - \left| \frac{dr}{d\Gamma} \right| \right) \cdot \phi \cdot d\Gamma_\varepsilon \quad (52)$$

$$I_{H12} = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{d^2\phi}{d\xi^2}\right)^i \left(\frac{1}{(J^i)^2}\right) (R_1 + R_3) + \left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)^i \left(\frac{1}{J^i}\right) \ln\left(\frac{R_3}{R_1}\right) + \quad (53)$$

$$\phi_i \left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3}\right) - \frac{c}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right]$$

El término impropio de la integral de la expresión (53) se cancela con el de la expresión (41) para valores de $c = 1$, es decir, para colocación nodal interior a los nodos extremos del elemento. La formulación hipersingular del MEC, tal y como se plantea, exige que la variable primaria posea continuidad C1, por lo que la cancelación de los términos impropios de la igualdad integral (40) queda de este modo garantizada. El término J^i hace

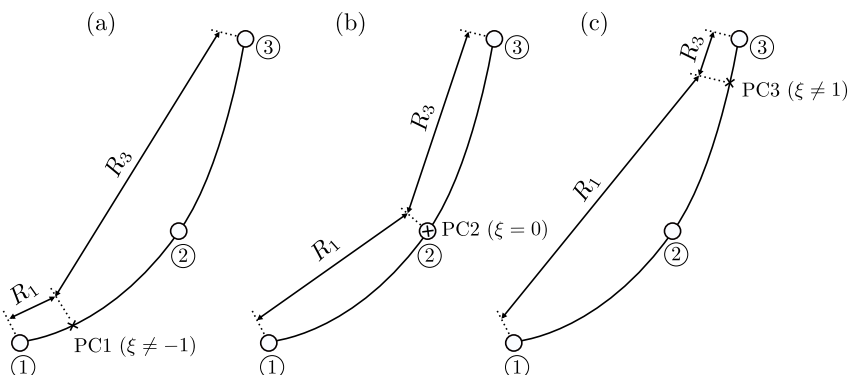


Figura 7: Distancias del punto de colocación a los extremos del elemento [11]. (a) Punto de colocación PC1. (b) Punto de colocación PC2. (c) Punto de colocación PC3.

referencia al jacobiano del elemento. R_1 y R_3 representan las distancias desde el punto de colocación interior a los extremos del elemento (ver Figura 7).

La expresión (51) puede ser igualmente dividida en subintegrandos, que tras aplicar las estrategias oportunas conducen a las siguientes expresiones:

$$I_{H3} = I_{H31} + I_{H32}$$

$$I_{H31} = \frac{1}{2} \cdot (ik)^2 \int_{\Gamma_\varepsilon} \ln(r) \cdot (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j - 1) \cdot \phi \cdot d\Gamma_\varepsilon \quad (54)$$

$$I_{H32} = \frac{1}{2} \cdot (ik)^2 \int_{\Gamma_\varepsilon} \ln(r) \cdot \left[\phi - \phi^i \cdot \left| \frac{dr}{d\Gamma} \right| \right] \cdot d\Gamma_\varepsilon \quad (55)$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot (ik)^2 \cdot \phi^i \cdot [R_1 \cdot (\ln(R_1) - 1) + R_3 \cdot (\ln(R_3) - 1)]$$

siendo $(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j - 1)$ de la expresión (54) y $\left[\phi - \phi^i \cdot \left| \frac{dr}{d\Gamma} \right| \right]$ de (55) terminos de orden $O(r^2)$ y $O(r)$ respectivamente, por lo que las integrales que los contienen se convierten en integrales regulares a ser resueltas mediante cuadratura gaussiana estándar.

Para un mayor nivel de detalle de las técnicas de regularización de las integrales consultar [11].

REFERENCIAS

- [1] L.A. de Lacerda, L.C. Wrobel, and W.J. Mansur. A dual boundary element formulation for sound propagation around barriers over an impedance plane. *Journal of Sound and Vibration*, 202(2):235–247, 1997.

- [2] O. Maeso and J.J. Aznárez. *Estrategias para la reducción del impacto acústico en el entorno de carreteras. Una aplicación del Método de los Elementos de Contorno*. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, 1997.
- [3] D. Greiner, J.J. Aznárez, O. Maseo, and G. Winter. Shape design of noise barriers using Evolutionary Optimization and Boundary Element. *The Fifth International Conference on Engineering Computational Technology, Civil-Comp-Press, Las Palmas de Gran Canaria, Spain*, September 2006.
- [4] D. Greiner, J.J. Aznárez, O. Maseo, and G. Winter. Single- and multi-objective shape design of Y-noise barriers using Evolutionary computation and Boundary Elements. *Advances in Engineering Software, Elsevier*, 41(2):368–378, 2010.
- [5] Matthew Wall. *GAlib: A C++ Library of Genetic Algorithm Components (<http://lancet.mit.edu/ga/>)*. Mechanical Engineering Department, Massachusetts Institute of Technology, 1996.
- [6] D. Whitley. The GENITOR algorithm and selection pressure: why rank-based allocation of reproductive trials is best. *In: Proceedings of the third international conference on genetic algorithms. Morgan Kaufmann*, pages 116–123, 1989.
- [7] D. Greiner, B. Galván, J.J. Aznárez, O. Maseo, and G. Winter. Robust design of noise attenuation barriers with Evolutionary multiobjective algorithms and the Boundary Element Method. *Lecture Notes in Computer Science Series (LNCS), Evolutionary Multi-Criterion Optimization, Eds: M. Ehrgott et al., Springer*, 5467:261–274, September 2009.
- [8] Código Técnico de la Edificación. Documento Básico HR. Protección frente al ruido. Espectro normalizado del ruido de automóviles, ponderado A (Tabla A.3). *Ministerio de Fomento de España*, Septiembre, 2009.
- [9] M. Baulac, J. Defrance, and P. Jean. Optimization with genetic algorithm of the acoustic performance of T-shaped noise barriers with a reactive top surface. *Applied Acoustics*, 69:332–342, 2008.
- [10] M.R. Monazzam and Y.W. Lam. Performance of profiled single noise barriers covered with quadratic residue diffusers. *Applied Acoustics*, 66:709–730, 2005.
- [11] A. Sáez, R. Gallego, and J. Domínguez. Hypersingular quarter-point boundary elements for crack problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:1681–1701, 1995.