



UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE
GRAN CANARIA

TRABAJO FIN DE MÁSTER



INSTITUTO UNIVERSITARIO
SIANI
DINÁMICA DE MEDIOS
CONTINUOS Y ESTRUCTURAS

Análisis de los efectos de interacción suelo-estructura en la respuesta dinámica de edificios

Cristina Medina López

Trabajo presentado en el Instituto SIANI como parte de los requisitos para optar al Máster de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería.

Tutor:

Dr. D. Juan J. Aznárez González

Tutor:

Dr. D. Luis A. Padrón Hernández

Las Palmas de Gran Canaria, Diciembre de 2010



Análisis de los efectos de interacción suelo-estructura en la respuesta dinámica de edificios

Trabajo Fin de Máster del Máster en
Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería
Instituto Universitario SIANI

Autora:

Cristina Medina López

Tutor:

Juan J. Aznárez González

Tutor:

Luis A. Padrón Hernández

Las Palmas de Gran Canaria, Diciembre 2010

Índice general

Índice de figuras	v
Índice de cuadros	xi
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Objetivos y alcance	4
1.3. Estructura del documento	4
2. Modelo para el análisis dinámico de estructuras de edificación	7
2.1. Introducción	7
2.2. Metodología de subestructuración	8
2.2.1. Fundamentos teóricos [1]	8
2.2.1.1. Paso 1: Interacción cinemática	9
2.2.1.2. Paso 2: Funciones de impedancia dinámica	10
2.2.1.3. Paso 3: Cálculo de la respuesta del sistema	10
2.2.2. Ventajas e inconvenientes frente a los <i>Métodos directos</i>	11
2.3. Definición del problema	11
2.4. Modelo de subestructuración	12
2.5. Parámetros adimensionales del problema	14
2.6. Adimensionalización de las ecuaciones del problema	15
2.6.1. Estructura con amortiguamiento viscoso	16
2.6.2. Estructura con amortiguamiento histerético	23
2.7. Respuesta del sistema en base rígida	23
2.7.1. Estructura con amortiguamiento viscoso	24
2.7.2. Estructura con amortiguamiento histerético	24
3. Validación del modelo	25
3.1. Introducción	25
3.2. Funciones de impedancia dinámica del suelo	25
3.2.1. Impedancias del suelo por <i>Verbic & Veletsos</i> [2]	26

3.2.2.	Impedancias del suelo por <i>Veletsos & Meek</i> [3]	28
3.2.3.	Impedancias del suelo: <i>Veletsos & Meek</i> [3] vs <i>Verbic & Veletsos</i> [3]	28
3.3.	Cimentaciones superficiales de masa despreciable	33
3.3.0.1.	Amortiguamiento Viscoso	33
3.3.0.2.	Discusión del espectro de respuesta en base rígida	39
3.3.1.	Amortiguamiento Histerético	41
3.3.2.	Análisis de la influencia del tipo de amortiguamiento de la estructura en la respuesta	46
3.4.	Cimentaciones superficiales con masa no despreciable	47
3.5.	Estudio de la frecuencia natural y el factor de amortiguamiento del sistema	50
3.5.1.	Procedimiento de cálculo	52
3.5.2.	Resultados	54
3.5.3.	Conclusiones	54
3.6.	Conclusiones	55
4.	Aplicación del modelo a estructuras de edificación pilotadas	57
4.1.	Introducción	57
4.2.	Funciones de impedancia dinámica del suelo	58
4.2.1.	Metodología	58
4.2.2.	Parámetros adimensionales	58
4.2.3.	Elección del rango de frecuencias	59
4.2.4.	Criterio de normalización	60
4.2.5.	Limitaciones de la malla	62
4.2.6.	Representación gráfica	63
4.3.	Parámetros adimensionales del problema	71
4.4.	Modelo de subestructuración	72
4.5.	Espectros de respuesta del sistema	81
4.6.	Estudio de la frecuencia natural y el factor de amortiguamiento del sistema	97
5.	Revisión, conclusiones y desarrollos futuros	127
5.1.	Revisión	127
5.2.	Conclusiones	128
5.3.	Desarrollos futuros	129
	Bibliografía	131

Índice de figuras

2.1. Metodología de subestructuración [1]	10
2.2. Modelo de subestructuración de una estructura de una planta . .	12
3.1. Coeficientes adimensionales de las impedancias del suelo, para el caso de cimentación superficial, por <i>Verbic & Veletsos</i> [2]	27
3.2. Coeficientes adimensionales de las impedancias del suelo, para el caso de cimentación superficial, por <i>Veletsos & Meek</i> [3]	29
3.3. Coeficientes adimensionales de las impedancias del suelo para el caso de cimentación superficial [3] [2]	31
3.4. Espectro de respuesta para el caso de cimentación superficial. Impedancias de <i>Veletsos & Meek</i> vs Impedancias de <i>Bielak</i>	32
3.5. Reproducción de los resultados de <i>Veletsos & Meek</i> [3] para el espectro de respuesta $\sigma = 3$	34
3.6. Reproducción de los resultados de <i>Veletsos & Meek</i> [3] para el espectro de respuesta $\sigma = 5$	35
3.7. Reproducción de los resultados de <i>Veletsos & Meek</i> [3] para el espectro de respuesta $\sigma = \infty$	36
3.8. Espectro de respuesta para varios valores de σ , para el caso de cimentación superficial, considerando amortiguamiento viscoso de la estructura	37
3.9. Análisis de sensibilidad de la respuesta máxima al coeficiente de amortiguamiento ξ	40
3.10. Espectro de respuesta para $\sigma = 3$, para el caso de cimentación superficial, considerando amortiguamiento histerético de la estructura	42
3.11. Espectro de respuesta para $\sigma = 5$, para el caso de cimentación superficial, considerando amortiguamiento histerético de la estructura	43
3.12. Espectro de respuesta para $\sigma = \infty$, para el caso de cimentación superficial, considerando amortiguamiento histerético de la estructura	44
3.13. Espectro de respuesta para varios valores de σ , para el caso de cimentación superficial, considerando amortiguamiento histerético de la estructura	45

3.14. Espectro de respuesta, para el caso de cimentación superficial, en función del tipo de amortiguamiento de la estructura	46
3.15. Análisis de sensibilidad del espectro de respuesta, en el caso de cimentación superficial, al parámetro $\frac{m_o}{m}$ para $\sigma = 3$	48
3.16. Análisis de sensibilidad del espectro de respuesta, en el caso de cimentación superficial, al parámetro $\frac{m_o}{m}$ para $\sigma = 5$	49
3.17. Sistema de un grado de libertad que reemplaza al sistema objeto de estudio. [3]	50
3.18. Oscilador equivalente. [3]	52
3.19. Comparación entre los resultados obtenidos con el modelo propuesto y los que figuran en el artículo de <i>Veletsos & Meek</i> [3] . . .	54
3.20. Comparación entre los resultados obtenidos con el modelo propuesto y los que figuran en el artículo de <i>Veletsos & Meek</i> [3] . . .	55
4.1. Definición del problema	59
4.2. Distribución geométrica de los pilotes en grupos de 2×2 , 3×3 y 4×4	61
4.3. Impedancias de un grupo de 2×2 pilotes en suelo flexible ($Ep/Es = 10^3$). $s/d = 5$	63
4.4. Impedancias de un grupo de 2×2 pilotes en suelo flexible ($Ep/Es = 10^3$). $s/d = 10$	64
4.5. Impedancias de un grupo de 2×2 pilotes en suelo rígido ($Ep/Es = 10^2$). $s/d = 5$	65
4.6. Impedancias de un grupo de 2×2 pilotes en suelo rígido ($Ep/Es = 10^2$). $s/d = 10$	66
4.7. Impedancias de un grupo de 3×3 pilotes en suelo flexible ($Ep/Es = 10^3$). $s/d = 10$	67
4.8. Impedancias de un grupo de 3×3 pilotes en suelo rígido ($Ep/Es = 10^2$). $s/d = 10$	68
4.9. Impedancias de un grupo de 4×4 pilotes en suelo flexible ($Ep/Es = 10^3$). $s/d = 10$	69
4.10. Impedancias de un grupo de 4×4 pilotes en suelo rígido ($Ep/Es = 10^2$). $s/d = 10$	70
4.11. Modelo de subestructuración de una estructura de una planta . .	72
4.12. Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 2×2 pilotes. $Ep/Es = 10^3$, $s/d = 5$, $h/b = 1, 2, 5$	81
4.13. Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 2×2 pilotes. $Ep/Es = 10^3$, $s/d = 10$, $h/b = 1, 2, 5$	82
4.14. Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 2×2 pilotes. $Ep/Es = 10^2$, $s/d = 5$, $h/b = 1, 2, 5$	83

4.15. Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 2×2 pilotes. $Ep/Es = 10^2$, $s/d = 10$, $h/b = 1, 2, 5$	84
4.16. Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 3×3 pilotes. $Ep/Es = 10^3$, $s/d = 2$, $h/b = 1, 2, 5$	85
4.17. Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 3×3 pilotes. $Ep/Es = 10^3$, $s/d = 5$, $h/b = 1, 2, 5$	86
4.18. Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 3×3 pilotes. $Ep/Es = 10^3$, $s/d = 10$, $h/b = 1, 2, 5$	87
4.19. Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 3×3 pilotes. $Ep/Es = 10^2$, $s/d = 2$, $h/b = 1, 2, 5$	88
4.20. Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 3×3 pilotes. $Ep/Es = 10^2$, $s/d = 5$, $h/b = 1, 2, 5$	89
4.21. Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 3×3 pilotes. $Ep/Es = 10^2$, $s/d = 10$, $h/b = 1, 2, 5$	90
4.22. Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 4×4 pilotes. $Ep/Es = 10^3$, $s/d = 2$, $h/b = 1, 2, 5$	91
4.23. Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 4×4 pilotes. $Ep/Es = 10^3$, $s/d = 5$, $h/b = 1, 2, 5$	92
4.24. Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 4×4 pilotes. $Ep/Es = 10^3$, $s/d = 10$, $h/b = 1, 2, 5$	93
4.25. Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 4×4 pilotes. $Ep/Es = 10^2$, $s/d = 2$, $h/b = 1, 2, 5$	94
4.26. Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 4×4 pilotes. $Ep/Es = 10^2$, $s/d = 5$, $h/b = 1, 2, 5$	95
4.27. Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 4×4 pilotes. $Ep/Es = 10^2$, $s/d = 10$, $h/b = 1, 2, 5$	96
4.28. Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 2×2 pilotes. $Ep/Es = 10^3$, $s/d = 5$, $h/b = 1, 2, 5$	98
4.29. Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 2×2 pilotes. $Ep/Es = 10^3$, $s/d = 10$, $h/b = 1, 2, 5$	99
4.30. Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 2×2 pilotes. $Ep/Es = 10^2$, $s/d = 5$, $h/b = 1, 2, 5$	100
4.31. Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 2×2 pilotes. $Ep/Es = 10^2$, $s/d = 10$, $h/b = 1, 2, 5$	101
4.32. Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 3×3 pilotes. $Ep/Es = 10^3$, $s/d = 2$, $h/b = 1, 2, 5$	102

4.33. Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 3×3 pilotes. $Ep/Es = 10^3$, $s/d = 5$, $h/b = 1, 2, 5$	103
4.34. Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 3×3 pilotes. $Ep/Es = 10^3$, $s/d = 10$, $h/b = 1, 2, 5$	104
4.35. Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 3×3 pilotes. $Ep/Es = 10^2$, $s/d = 2$, $h/b = 1, 2, 5$	105
4.36. Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 3×3 pilotes. $Ep/Es = 10^2$, $s/d = 5$, $h/b = 1, 2, 5$	106
4.37. Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 3×3 pilotes. $Ep/Es = 10^2$, $s/d = 10$, $h/b = 1, 2, 5$	107
4.38. Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 4×4 pilotes. $Ep/Es = 10^3$, $s/d = 2$, $h/b = 1, 2, 5$	108
4.39. Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 4×4 pilotes. $Ep/Es = 10^3$, $s/d = 5$, $h/b = 1, 2, 5$	109
4.40. Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 4×4 pilotes. $Ep/Es = 10^3$, $s/d = 10$, $h/b = 1, 2, 5$	110
4.41. Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 4×4 pilotes. $Ep/Es = 10^2$, $s/d = 2$, $h/b = 1, 2, 5$	111
4.42. Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 4×4 pilotes. $Ep/Es = 10^2$, $s/d = 5$, $h/b = 1, 2, 5$	112
4.43. Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 4×4 pilotes. $Ep/Es = 10^2$, $s/d = 10$, $h/b = 1, 2, 5$	113
4.44. Influencia del número de pilotes en la frecuencia natural \tilde{f}/f y el factor de amortiguamiento ξ . $Ep/Es = 10^3$, $s/d = 2$, $h/b = 1, 2, 5$	114
4.45. Influencia del número de pilotes en la frecuencia natural \tilde{f}/f y el factor de amortiguamiento ξ . $Ep/Es = 10^3$, $s/d = 5$, $h/b = 1, 2, 5$	115
4.46. Influencia del número de pilotes en la frecuencia natural \tilde{f}/f y el factor de amortiguamiento ξ . $Ep/Es = 10^3$, $s/d = 10$, $h/b = 1, 2, 5$	116
4.47. Influencia del número de pilotes en la frecuencia natural \tilde{f}/f y el factor de amortiguamiento ξ . $Ep/Es = 10^2$, $s/d = 2$, $h/b = 1, 2, 3$	117

4.48. Influencia del número de pilotes en la frecuencia natural \tilde{f}/f y el factor de amortiguamiento ξ . $Ep/Es = 10^2$, $s/d = 5$, $h/b = 1, 2, 5$	118
4.49. Influencia del número de pilotes en la frecuencia natural \tilde{f}/f y el factor de amortiguamiento ξ . $Ep/Es = 10^2$, $s/d = 10$, $h/b = 1, 2, 5$	119
4.50. Influencia de la separación entre pilotes de un grupo de 2×2 en la frecuencia natural \tilde{f}/f y el factor de amortiguamiento ξ . $Ep/Es = 10^3$, $h/b = 1, 2, 5$	121
4.51. Influencia de la separación entre pilotes de un grupo de 3×3 en la frecuencia natural \tilde{f}/f y el factor de amortiguamiento ξ . $Ep/Es = 10^3$, $h/b = 1, 2, 5$	122
4.52. Influencia de la separación entre pilotes de un grupo de 4×4 en la frecuencia natural \tilde{f}/f y el factor de amortiguamiento ξ . $Ep/Es = 10^3$, $h/b = 1, 2, 5$	123
4.53. Influencia de la separación entre pilotes de un grupo de 2×2 en la frecuencia natural \tilde{f}/f y el factor de amortiguamiento ξ . $Ep/Es = 10^2$, $h/b = 1, 2, 5$	124
4.54. Influencia de la separación entre pilotes de un grupo de 3×3 en la frecuencia natural \tilde{f}/f y el factor de amortiguamiento ξ . $Ep/Es = 10^2$, $h/b = 1, 2, 5$	125
4.55. Influencia de la separación entre pilotes de un grupo de 4×4 en la frecuencia natural \tilde{f}/f y el factor de amortiguamiento ξ . $Ep/Es = 10^2$, $h/b = 1, 2, 5$	126

Índice de cuadros

3.1. Valores de b_i (según <i>Verbic & Veletsos</i> [2])	27
3.2. Funciones de impedancia dinámica del suelo para el caso de cimentación superficial. <i>Verbic & Veletsos</i> vs <i>Veletsos & Meek</i> . . .	30

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

Este Trabajo Fin de Máster se integra en la línea de trabajo principal que se desarrolla en la División de Mecánica de Medios Continuos y Estructuras del Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería, a la que pertenecen los tutores, y que tiene por objetivo el desarrollo de modelos numéricos que permitan determinar la respuesta dinámica de estructuras de diferente tipología. Se trata de modelos que posibilitan el estudio de desplazamientos, deformaciones, esfuerzos y tensiones en cualquier punto de la estructura ante cargas de cualquier tipo variables en el tiempo y que, por tanto, son magnitudes que también poseen dependencia temporal.

Es posible, así, obtener de forma precisa la respuesta dinámica de una estructura ante, por ejemplo, las solicitaciones producidas por una máquina anclada a la misma o en sus proximidades, las cargas dinámicas producidas por el viento o las vibraciones que se transmiten desde el terreno a través del cimiento durante el desarrollo de un evento de carácter sísmico. Este último tipo de problema, de especial interés en el diseño de estructuras civiles singulares (puentes, presas, edificios altos, etc.), presenta algunas dificultades añadidas para su tratamiento. Los modelos a desarrollar para el estudio sísmico de estructuras deben tener en cuenta aspectos tales como el carácter propagatorio de la excitación y el ángulo de incidencia de las ondas sísmicas sobre el emplazamiento, los efectos de distorsión del campo incidente asociados a la topografía, estratigrafía o la propia geometría del cimiento y, en general, cualquier aspecto relacionado con la interacción entre la estructura analizada y el terreno de cimentación. Considerar con rigor estos efectos requiere de la utilización de modelos directos que tengan en cuenta la estructura y el terreno y que formulen adecuadamente la interacción mutua. Su principal inconveniente es el elevado número de grados de libertad que implican, de ahí que estos modelos directos, hasta el desarrollo reciente de computadores de

grandes prestaciones accesibles, tuviesen un campo de aplicación muy restringido. La metodología desarrollada entonces (ampliamente utilizada actualmente en algunos problemas) se basa en la aplicación de técnicas de subestructuración que permitan el análisis dinámico teniendo en cuenta los fenómenos de interacción de forma simplificada [1].

Los modelos formulados en la División de Mecánica de Medios Continuos y Estructuras se enmarcan dentro de la categoría de Modelos Directos, siendo aplicados a problemas donde coexisten medios de diferentes características y comportamientos (suelo, estructura, agua, sedimentos) sometidos a solicitaciones sísmicas. Ante este tipo de solicitaciones, estos medios interactúan entre sí formando un sistema acoplado en el que ninguna de las partes puede ser estudiada aisladamente. Además, existe una dificultad adicional asociada al hecho de que algunas de estas regiones pueden ser muy extensas (o prácticamente infinitas, como el suelo). Este hecho dificulta el estudio, ya que, a diferencia del análisis estático, en el caso dinámico acciones de origen muy alejado de un punto pueden tener una gran influencia sobre los movimientos y tensiones a que éste se ve sometido.

El método utilizado para el tratamiento numérico de las ecuaciones del problema en estos modelos ha sido, fundamentalmente, el Método de los Elementos de Contorno. Teniendo en cuenta las características del problema a resolver y sus condicionantes, el Método de los Elementos de Contorno es, sin duda, la opción más adecuada [4]. Este Método permite el tratamiento sencillo de regiones de geometría infinita o semi-infinita en problemas dinámicos, ya que verifica de forma implícita las condiciones de radiación. Asimismo, la incorporación de un tren de ondas como solicitación en el terreno simulando el evento sísmico es también muy natural. En este sentido, y con anterioridad al desarrollo del presente Trabajo Fin de Máster, ya se había desarrollado un modelo numérico acoplado que, haciendo uso del Método de Elementos de Contorno, permite el estudio de la respuesta sísmica de estructuras continuas, habiendo sido aplicado con éxito al estudio sísmico de presas bóveda [5–7]. En este modelo, todos los dominios implicados (terreno, presa, agua y sedimentos de fondo) son discretizados haciendo uso del Método de Elementos de Contorno como regiones continuas sin simplificación dimensional o de comportamiento alguna. La interacción dinámica entre dichas regiones se formula de manera rigurosa (equilibrio y compatibilidad) dando lugar a un sistema de ecuaciones donde las incógnitas son desplazamientos o tensiones en el contorno de dichas regiones. Los desplazamientos y tensiones en el interior de estas regiones pueden obtenerse de forma muy sencilla a través de los valores calculados en el contorno. La solicitación consiste en un tren de ondas sísmicas planas de diferente tipo (P, SH, SV y ondas de Rayleigh) que, partiendo desde el infinito, incide en el lugar de emplazamiento de la estructura.

Otro caso de interés para los miembros de la División en los últimos años ha sido el análisis de la respuesta dinámica de estructuras de edificación cimentadas

mediante pilotes. Este problema tiene gran interés, principalmente, por dos motivos básicos: el gran número de edificaciones de estas características en zonas de peligrosidad sísmica y la necesidad, aún hoy en día, de alcanzar una mayor y mejor comprensión de los fenómenos implicados en la respuesta dinámica de estructuras de estas características. En este sentido, se ha desarrollado e implementado un modelo acoplado de Elementos de Contorno y Elementos Finitos (MEC-MEF) tridimensional armónico que aprovecha las ventajas de cada metodología para el análisis dinámico directo de este tipo de estructuras.

En cuanto a la respuesta de la superestructura, los efectos de interacción suelo-estructura (SSI) en edificios han sido objeto de estudio durante más de treinta años. Los trabajos pioneros en este área, que investigaron la influencia de la flexibilidad del suelo en el comportamiento dinámico de estructuras a cortante de una sola altura, fueron presentados por Parmelee [8], Perelman et al [9], Parmelee et al [10] y Sarrazin et al [11]. A partir de estos trabajos, Veletsos y Meek [3], y Bielak [12], propusieron, por separado, aproximaciones basadas en modelos monodimensionales dirigidos a ofrecer pautas para el diseño de estructuras. Estos autores utilizaron las funciones de impedancia que estaban disponibles en aquel momento, y que correspondían a placas rígidas superficiales de forma circular. Una década más tarde, Wolf presentó una recopilación de problemas de interacción suelo-estructura en su libro [13]. Algunos trabajos posteriores ampliaron estos estudios y analizaron la influencia del grado de embebimiento de la cimentación, y de los fenómenos de interacción cinemática (*e.g.* [14–17]).

Es conocida la importancia que los fenómenos de interacción suelo-estructura tienen en el comportamiento dinámico de edificios. La evaluación correcta de la respuesta dinámica de estas y otras estructuras, requiere del desarrollo de modelos que incorporen de forma rigurosa la interacción entre la estructura y el terreno en el que se cimienta. Dichos fenómenos de interacción dependen de factores tales como: el tiempo de cimentación, su geometría y grado de enterramiento, el tipo de suelo y su estratigrafía así como las características de la estructura.

En este Trabajo de Fin de Máster, se inicia el desarrollo y estudio de un modelo simple de interacción suelo-estructura en el dominio de la frecuencia, que permitirá evaluar la influencia de estos factores en la respuesta de estructuras de edificación frente a cargas de origen sísmico. En este modelo, la estructura se considera un sistema discreto con un número finito de grados de libertad, el conjunto terreno-cimentación se representará a través de resortes y amortiguadores equivalentes cuyas propiedades dependen de la frecuencia de excitación y, por último, la sollicitación (onda sísmica) a través de sus efectos (desplazamiento y giro) en la base de la estructura. El modelo permitirá cuantificar el efecto de la interacción sobre variables de la estructura tales como su frecuencia natural, esfuerzos y amortiguamiento.

Los valores de las funciones de impedancia dinámica del suelo, así como los fac-

tores de interacción cinemática, se han obtenido utilizando el código que resultó de la implementación de un modelo que ya había sido desarrollado en el seno de la División de Mecánica de Medios Continuos y Estructuras del Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería. Se trata de un modelo acoplado de Elementos de Contorno y Elementos Finitos (MEC-MEF) tridimensional armónico que aprovecha las ventajas de cada metodología para el análisis dinámico directo de estructuras de edificación cimentadas mediante pilotes. Este modelo cuenta con las ventajas del Método de Elementos de Contorno para representar el terreno donde se asienta la edificación, es decir, su carácter de medio semi-infinito así como la presencia de ondas sísmicas excitadoras, y la simplificación que supone modelar vigas, pilares y pilotes de la estructura como barras mediante el MEF. Este programa, muy desarrollado en la actualidad, ha permitido el análisis de la respuesta de cimentaciones pilotadas, tanto en impedancias como en interacción cinemática [18–20], así como el estudio de la respuesta de la superestructura y de otras estructuras cercanas, sometido el conjunto a trenes de ondas sísmicas con incidencia vertical [21, 22].

1.2. Objetivos y alcance

El objetivo principal de este Trabajo Fin de Máster es la formulación e implementación de un modelo simple que permita analizar la influencia de los fenómenos de interacción suelo-estructura en la respuesta sísmica de un edificio. El modelo y el estudio que se proponen se realizarán en el dominio de la frecuencia.

Además de este objetivo fundamental, pueden enumerarse otra serie de objetivos metodológicos, de no menor interés, que servirán para la formación integral de la Alumna e introducción a las tareas de investigación. Así, pueden destacarse: la formación curricular en el campo de la dinámica de estructuras, su familiarización con la gestión y recopilación de bibliografía y la elaboración de modelos y programas informáticos, así como el uso de otros ya desarrollados para el estudio de alguno de los problemas que debe afrontar.

1.3. Estructura del documento

En el capítulo 2 se presenta un modelo, basado en la metodología de subestructuración, para el análisis dinámico de estructuras de edificación. El capítulo 3 se ha dedicado a la validación del modelo propuesto reproduciendo los resultados obtenidos por *Veletsos & Meek* [3] para cimentaciones superficiales. En él se muestra el análisis de sensibilidad de la respuesta a determinados parámetros. En el capítulo 4 se expone la aplicación de este modelo a la obtención de la respuesta sísmica de estructuras de edificación pilotadas y se presentan los resultados.

Finalmente, en el capítulo 5 se realiza una revisión del modelo propuesto y se extraen conclusiones de los resultados obtenidos, planteándose además posibles actuaciones futuras en la misma línea de investigación.

Capítulo 2

Modelo para el análisis dinámico de estructuras de edificación

2.1. Introducción

Las funciones de impedancia dinámica y los factores de interacción cinemática de las cimentaciones se utilizan con frecuencia para predecir el comportamiento sísmico de estructuras teniendo en cuenta los efectos de la interacción suelo-estructura. Esto se logra a través del empleo de modelos de subestructuración más o menos elaborados en los cuales el suelo es reemplazado por resortes y amortiguadores que representan su rigidez y amortiguamiento respectivamente. Por otra parte, el movimiento sísmico de excitación que se emplea en el modelo de subestructuración puede verse modificado de forma significativa por la presencia de la cimentación en el suelo. Por lo tanto, en muchas ocasiones, el movimiento de la cimentación debe calcularse teniendo en cuenta estos efectos de interacción cinemática.

Los *Modelos Directos* constituyen una forma más precisa de analizar la respuesta del sistema cuando los efectos de la interacción suelo-estructura pueden ser relevantes, ya que modelan los aspectos principales del problema y sus interacciones mutuas de manera más rigurosa. Sin embargo, estos modelos son más complejos y resultan más costosos desde el punto de vista computacional, y por consiguiente, no son utilizados con frecuencia para el análisis de este tipo de problemas.

En este trabajo, se explotan las ventajas de la *Metodología de Subestructuración*. Esta metodología es sencilla y fácil de implementar, proporciona resultados suficientemente precisos para el tipo de problemas que se abordan en este trabajo, y al mismo tiempo permite realizar análisis paramétricos con muy poco coste computacional (contando con las funciones de impedancia dinámica y los factores de interacción cinemática como datos de partida).

El contenido de este capítulo comienza con una breve exposición de la técnica de subestructuración en la sección 2.2. Seguidamente, el problema objeto de estudio se describe en la sección 2.3. Posteriormente, se presenta el modelo de subestructuración que se empleará a lo largo del resto del capítulo en la sección 2.4, donde se deducen también sus ecuaciones de movimiento. El conjunto de parámetros adimensionales elegidos para definir los sistemas objeto de estudio se enumeran en la sección 2.5. En la sección 2.6, se expone de manera detallada el proceso de adimensionalización de las ecuaciones del problema. Las ecuaciones empleadas para la obtención de la respuesta del sistema en base rígida se presentan en la sección 2.7.

2.2. Metodología de subestructuración

En esta sección se exponen los fundamentos teóricos de la *Metodología de subestructuración* en la que se basan los modelos propuestos en el presente trabajo.

2.2.1. Fundamentos teóricos [1]

Las ecuaciones generales de movimiento del sistema suelo-estructura consideradas en el enfoque directo pueden escribirse en forma matricial como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

donde \mathbf{y} es el vector de desplazamientos relativos, \mathbf{u} es el vector de aceleraciones absolutas, $\ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{g}}$ es un vector de aceleración generalizada del terreno, y $\ddot{\mathbf{y}} = \ddot{\mathbf{u}} - \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{g}}$. Es posible, de manera alternativa, escribir esta ecuación en forma de 2 ecuaciones:

$$\mathbf{M}_1\ddot{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}_1 + \mathbf{K}\mathbf{y}_1 = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}_2 + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}_2 + \mathbf{K}\mathbf{y}_2 = -\mathbf{M}_2\ddot{\mathbf{u}}_1 \quad (2.3)$$

donde $\ddot{\mathbf{u}}_1 = \ddot{\mathbf{y}}_1 + \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{g}}$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{y}_2$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$ y $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$. \mathbf{M}_1 representa la masa del sistema excluyendo la masa de la estructura, mientras que \mathbf{M}_2 representa exclusivamente la masa de la estructura.

Una interpretación física de estas dos ecuaciones indica que en la ecuación (2.2) el sistema con una estructura sin masa está sometido al movimiento prescrito del suelo, produciendo como resultado el vector de desplazamientos \mathbf{y}_1 (o de aceleraciones $\ddot{\mathbf{y}}_1$); dado que \mathbf{M}_2 incluye sólo la masa de la estructura, en la ecuación (2.3) el sistema completo está sometido a las fuerzas nodales equivalentes $-\mathbf{M}_2\ddot{\mathbf{u}}_1$ aplicadas sólo a la estructura. La solución total es, por lo tanto, la suma de las dos soluciones.

Para el caso particular donde la combinación cimentación-estructura es muy rígida, es posible eliminar todo el conjunto de la estructura de la ecuación (2.2) y sustituirlo por una cimentación infinitamente rígida de masa despreciable. Esto está justificado, dado que la estructura en este paso está actuando como un cuerpo rígido sin masa. La ecuación (2.2) describe entonces la respuesta de una cimentación rígida de masa despreciable sometida al movimiento del suelo especificado. Por otra parte, dado que las fuerzas sólo están aplicadas sobre la estructura en la ecuación (2.3), los grados de libertad dinámicos correspondientes al suelo pueden condensarse en este paso. Esta condensación da como resultado la expresión de los efectos del suelo en términos de las funciones de impedancia dinámica, normalmente representadas como resortes y amortiguadores. La condensación se realizará para cada frecuencia incluyendo, rigidez, amortiguamiento y términos inerciales y, por lo tanto, las impedancias dinámicas del suelo son dependientes de la frecuencia. \mathbf{y}_2 puede ser interpretada como un vector de desplazamientos relativos a un soporte ficticio, mientras que \mathbf{u}_1 es el movimiento del soporte equivalente.

Por consiguiente, para una cimentación rígida es válido dividir la resolución en tres pasos:

1. determinación del movimiento de la cimentación rígida de masa despreciable cuando está sometida al mismo movimiento de excitación que el sistema completo. Esto es la resolución de la ecuación (2.2). Para una cimentación embebida esto conducirá por lo general a traslaciones y rotaciones.
2. determinación de la impedancia en función de la frecuencia, para los grados de libertad relevantes. Este paso se corresponde con la condensación dinámica de los grados de libertad del suelo. Esto conduce a los llamados “resortes” del suelo.
3. cálculo de la respuesta de la estructura real sustentada sobre “resortes” dependientes de la frecuencia que representan el suelo y sometida en la base de estos “resortes” al movimiento calculado en el paso 1.

La única aproximación que implica esta metodología tiene que ver con la deformabilidad de la cimentación estructural. Si esta cimentación fuese rígida, la solución obtenida mediante este procedimiento debería ser idéntica a la que proporciona el método directo (suponiendo por supuesto definiciones consistentes del movimiento y los mismos procedimientos numéricos).

2.2.1.1. Paso 1: Interacción cinemática

Este primer paso es particularmente sencillo para una cimentación superficial, dado que sólo requiere resolver un problema de amplificación unidimensional para

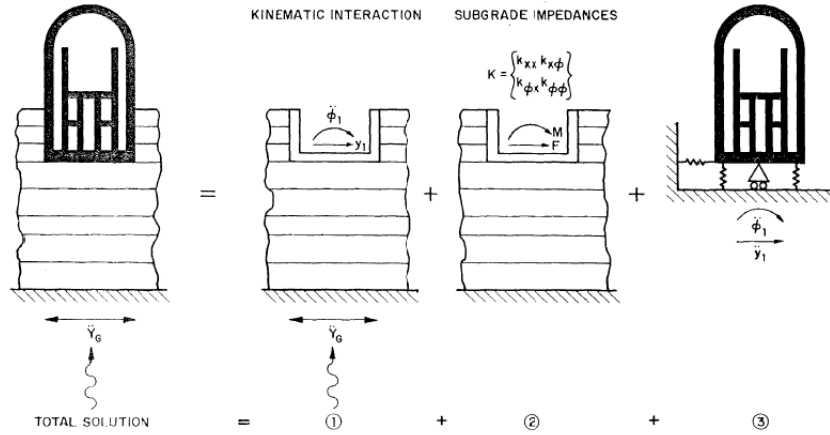


Figura 2.1: Metodología de subestructuración [1]

producir resultados consistentes con los del método directo. Puesto que se trata de un problema unidimensional, puede ser resuelto de manera económica con soluciones continuas o modelos discretos. Para una cimentación embebida, sin embargo, se requiere el uso de algunas técnicas numéricas, empleadas en los métodos directos, como los elementos finitos o los elementos de contorno. No obstante, el problema es de menor tamaño puesto que los grados de libertad de la estructura no están incluidos. Es importante mencionar de nuevo que una solución consistente con los resultados del método directo producirá traslaciones y rotaciones en una cimentación rígida embebida de masa despreciable.

2.2.1.2. Paso 2: Funciones de impedancia dinámica

Las impedancias del suelo en función de la frecuencia se calculan, para una cimentación embebida, mediante procedimientos similares a los empleados en los métodos directos. El procedimiento consiste en someter a la base de la losa de cimentación, supuesta infinitamente rígida y de masa despreciable, a rotaciones y desplazamientos armónicos estacionarios y unitarios, y determinar las reacciones correspondientes (términos de la matriz de rigidez).

2.2.1.3. Paso 3: Cálculo de la respuesta del sistema

Una vez que el movimiento de excitación y las funciones de impedancia dinámica de la base son conocidas, el último paso se reduce a un simple análisis dinámico de un relativamente pequeño sistema de varios grados de libertad. La resolución puede llevarse a cabo en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia. Una solución en el dominio de la frecuencia es especialmente conveniente, dado que las impedancias son dependientes de la frecuencia.

2.2.2. Ventajas e inconvenientes frente a los *Métodos directos*

La metodología de subestructuración, o de los tres pasos, tiene la ventaja de tener menor coste computacional, dado que incluso si se emplean técnicas de elemententos finitos, el problema que se resuelve en cada paso es un problema más pequeño. Esto permite, por tanto, realizar más estudios paramétricos, y la precisión de cada paso está sujeta a un mejor control. De especial importancia es la posibilidad de utilizar en este método las condiciones de simetría o cilíndricas si la cimentación cumple con estos requisitos, incluso si la estructura no lo hace (lo cual es frecuente).

Su principal deficiencia está en la reproducción de un cimiento flexible, y la incapacidad para realizar verdaderos análisis no lineales en el dominio del tiempo.

2.3. Definición del problema

Este capítulo se centra en la respuesta dinámica de estructuras lineales a cor-tante que se comportan como sistemas de un sólo grado de libertad en su condi-cion de base rígida. Este modelo corresponde a un edificio de una planta o al modo fundamental de vibración de estructuras multimodales de varias plantas. Varios autores [15] resaltan el hecho de que la interacción suelo estructura afecta principalmente al modo fundamental de vibración de estructuras de varias plan-tas, justificando de este modo el uso de esta aproximación simplificada. De esta manera, su comportamiento dinámico puede definirse mediante su periodo funda-mental en base rígida T , la altura h de la resultante de las fuerzas de inercia para el primer modo, la masa m implicada en este modo, y el ratio de amortiguamiento correspondiente a la estructura.

El sistema considerado consiste en una estructura simple y lineal, de masa m , rigidez k y coeficiente de amortiguamiento viscoso c , con un solo grado de libertad en su condición de base rígida, que está soportada por una cimentación de masa m_o , sobre la superficie de un semiespacio homogéneo y linealmente elástico.

Las estructuras son excitadas en la base y los desplazamientos en campo li-bre se han considerado como un movimiento armónico. La excitación armónica se ha incluido tanto por su importancia en muchas aplicaciones prácticas, como porque entender la respuesta del sistema a esta excitación en particular se con-sidera esencial para entender la respuesta frente a excitaciones transitorias más complejas.

Los efectos del empotramiento de la cimentación, los estratos de la cimentación y el amortiguamiento del material en el subespacio no se han tenido en cuenta.

La cimentación se ha idealizado como una placa rígida y circular, y los pi-

lares de la estructura se han considerado de masa despreciable e inextensibles axialmente. Ambas, la masa de la cimentación y la masa de la estructura se han supuesto uniformemente distribuidas en áreas circulares.

Este modelo de cimentación-estructura parece haber sido utilizado por primera vez por Parmelee [8] en 1967, y ha constituido la base de la mayoría de las investigaciones posteriores.

2.4. Modelo de subestructuración

Este problema puede estudiarse mediante una aproximación por subestructuración, en la cual el sistema está dividido en el sistema cimiento-estructura, y la rigidez y el amortiguamiento entre el suelo y el cimiento, representada por medio de resortes y amortiguadores, tal y como se muestra en la *Figura 2.2*.

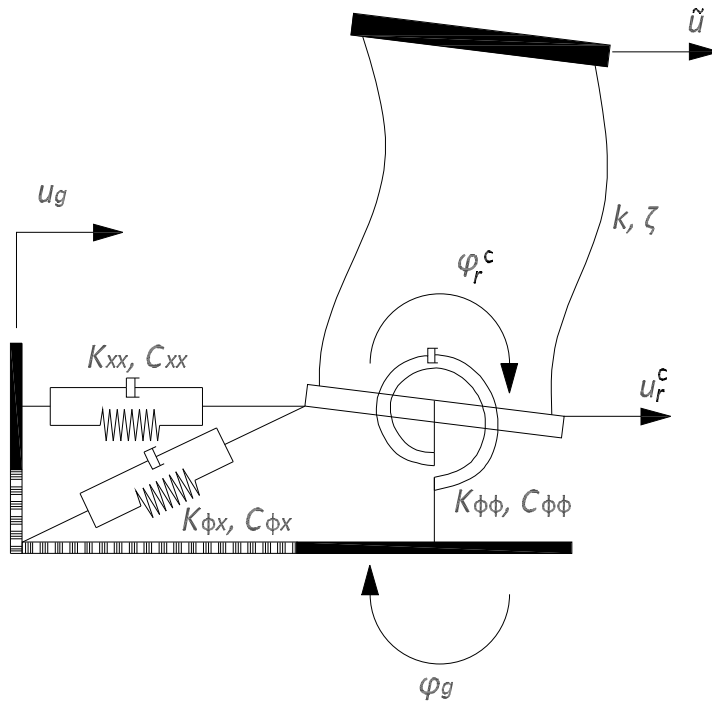


Figura 2.2: Modelo de subestructuración de una estructura de una planta

Los movimientos horizontal u_r^c y de giro φ_r^c de la cimentación están definidos en la base de la estructura y en relación a los movimientos que se aplican sobre el cimiento.

Las funciones dependientes de la frecuencia (K_{xx}, C_{xx}) , $(K_{\theta\theta}, C_{\theta\theta})$ y $(K_{x\theta}, C_{x\theta})$ representan la rigidez y el amortiguamiento del suelo en los modos de vibración horizontal, de balanceo y modo de vibración cruzado horizontal-balanceo, respectivamente. A estas funciones se les denomina impedancias.

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento del sistema mostrado en la *Figura 2.2*, asumiendo pequeños desplazamientos, pueden escribirse en términos de movimientos relativos como

$$m \cdot [\ddot{\tilde{u}} + \ddot{u}_r^c + \ddot{u}_g + h(\ddot{\varphi}_g + \ddot{\varphi}_r^c)] + K \cdot \tilde{u} = 0 \quad (2.4)$$

$$m_o \cdot [\ddot{u}_r^c + \ddot{u}_g] + \hat{K}_{xx} \cdot u_r^c + \hat{K}_{x\theta} \cdot \varphi_r^c - K \cdot \tilde{u} = 0 \quad (2.5)$$

$$m \cdot h[\ddot{\tilde{u}} + \ddot{u}_r^c + \ddot{u}_g + h(\ddot{\varphi}_g + \ddot{\varphi}_r^c)] + I(\ddot{\varphi}_r^c + \ddot{\varphi}_g) + \hat{K}_{\theta x} \cdot u_r^c + \hat{K}_{\theta\theta} \cdot \varphi_r^c + I_o(\ddot{\varphi}_r^c + \ddot{\varphi}_g) = 0 \quad (2.6)$$

donde la ecuación (2.4) representa el equilibrio de fuerzas horizontales de la estructura, la ecuación (2.5) el equilibrio de fuerzas horizontales del cimiento y la ecuación (2.6) el equilibrio de momentos del sistema cimiento-estructura con respecto a un eje horizontal que pasa por el centro de gravedad del cimiento.

Pasando al lado derecho de la igualdad el campo incidente, las ecuaciones anteriores se escriben

$$m(\ddot{\tilde{u}} + \ddot{u}_r^c + h \ddot{\varphi}_r^c) + K \cdot \tilde{u} = -m(\ddot{u}_g + h \ddot{\varphi}_g) \quad (2.7)$$

$$m_o \ddot{u}_r^c + \hat{K}_{xx} \cdot u_r^c + \hat{K}_{x\theta} \cdot \varphi_r^c - K \cdot \tilde{u} = -m_o \cdot \ddot{u}_g \quad (2.8)$$

$$m \cdot h(\ddot{\tilde{u}} + \ddot{u}_r^c + h \cdot \ddot{\varphi}_r^c) + \hat{K}_{\theta x} \cdot u_r^c + \hat{K}_{\theta\theta} \cdot \varphi_r^c + I \cdot \ddot{\varphi}_r^c + I_o \cdot \ddot{\varphi}_r^c = \\ -m \cdot h(\ddot{u}_g + h \cdot \ddot{\varphi}_g) - I_o \cdot \ddot{\varphi}_g - I \cdot \ddot{\varphi}_g \quad (2.9)$$

Considerando movimientos armónicos del tipo $\tilde{u}(t) = \tilde{u}e^{i\omega t}$ donde ω es la frecuencia de excitación, las ecuaciones anteriores pueden escribirse en el dominio de la frecuencia como

$$(K - m\omega^2) \cdot \tilde{u} - m\omega^2 u_r^c - h m\omega^2 \varphi_r^c = m\omega^2 (u_g + h \varphi_g) \quad (2.10)$$

$$-K \tilde{u} - m_o \omega^2 u_r^c + \hat{K}_{xx} u_r^c + \hat{K}_{x\theta} \varphi_r^c = \omega^2 m_o u_g \quad (2.11)$$

$$-\omega^2 m h \tilde{u} + (\hat{K}_{\theta x} - \omega^2 m h) u_r^c + (\hat{K}_{\theta\theta} - m \omega^2 h^2 - \omega^2 I_o) \varphi_r^c = \omega^2 m h (u_g + h \varphi_g) + \omega^2 I_o \varphi_g \quad (2.12)$$

Estas ecuaciones pueden expresarse de forma matricial como

$$\begin{bmatrix} K - m \omega^2 & -m \omega^2 & -h \omega^2 m \\ -K & \hat{K}_{xx} - m_o \omega^2 & \hat{K}_{x\theta} \\ -\omega^2 h m & \hat{K}_{\theta x} - \omega^2 m h & \hat{K}_{\theta\theta} - m \omega^2 h^2 - \omega^2 I_o - \omega^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ u_r^c \\ \varphi_r^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \omega^2 (u_g + h \varphi_g) \\ \omega^2 m_o u_g \\ \omega^2 m h (u_g + h \varphi_g) + (I_o + I) \omega^2 \varphi_g \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Escribiendo de forma separada la matriz de rigidez y la matriz de masa, así como los campos incidentes de desplazamiento y giro, se obtiene

$$\begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ -K & \hat{K}_{xx} & \hat{K}_{x\theta} \\ 0 & \hat{K}_{\theta x} & \hat{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ u_r^c \\ \varphi_r^c \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m & m & m h \\ 0 & m_o & 0 \\ m h & m h & m h^2 + I + I_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ u_r^c \\ \varphi_r^c \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} m \\ m_o \\ m h \end{bmatrix} u_g + \omega^2 \begin{bmatrix} m h \\ 0 \\ m h^2 + I_o + I \end{bmatrix} \varphi_g \quad (2.14)$$

2.5. Parámetros adimensionales del problema

La respuesta del sistema cimiento-estructura depende de las propiedades del cimiento y del suelo, las propiedades de la estructura y de las características de la excitación. Los efectos de estos factores pueden expresarse en términos de parámetros adimensionales [3].

1. Parámetro de onda (wave parameter), que mide la rigidez relativa suelo-estructura.

$$\sigma = \frac{C_s}{f \cdot h} = 3, 5, \infty \quad (2.15)$$

donde:

C_s es la velocidad propagación de la onda S en el suelo.

$$C_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.16)$$

f es frecuencia natural en Hz de la estructura sobre base rígida.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{p}{2\pi} \quad (2.17)$$

donde p es la frecuencia natural en rad/s de la estructura sobre base rígida.

2. Ratio de esbeltez (slenderness ratio) $h/r = 1, 2, 5$ mide la relación entre la altura de la estructura y el radio del cimient.
3. Densidad de masa relativa entre la estructura y el suelo.

$$\delta = \frac{m}{\rho \pi r^2 h} = 0,15 \quad (2.18)$$

donde:

ρ es la densidad del suelo.

4. Ratio de masa cimiento-estructura $\frac{m_o}{m} = 0$
5. Coeficiente de amortiguamiento de la estructura en base rígida $\xi = 0,02$.
6. Coeficiente de Poisson del suelo $\nu = 0,45$.
7. Frecuencia de excitación ω .

2.6. Adimensionalización de las ecuaciones del problema

En esta sección se expone de forma detallada el proceso de adimensionalización de las ecuaciones de movimiento del sistema (2.4),(2.5),(2.6) presentadas en la sección 2.4.

2.6.1. Estructura con amortiguamiento viscoso

Considerando amortiguamiento viscoso para el material de la estructura se obtiene

$$K = k + i\omega C = k + 2mp\xi\omega i \quad (2.19)$$

Por otra parte, las expresiones de las impedancias del suelo son

$$\hat{K}_{xx} = k_{xx}^e \cdot (k_{xx} + ia_o C_{xx}) = K_{xx} + ia_o C_{xx} \quad (2.20)$$

$$\hat{K}_{\theta\theta} = k_{\theta\theta}^e \cdot (k_{\theta\theta} + ia_o C_{\theta\theta}) = K_{\theta\theta} + ia_o C_{\theta\theta} \quad (2.21)$$

$$\hat{K}_{x\theta} = \hat{K}_{\theta x} = -k_{xx}^e \cdot (k_{x\theta} + ia_o C_{x\theta}) = K_{x\theta} + ia_o C_{x\theta} \quad (2.22)$$

donde las impedancias estáticas, k_{xx}^e y $k_{\theta\theta}^e$, tienen las siguientes expresiones

$$k_{xx}^e = \frac{8\mu r}{2 - \nu} \quad (2.23)$$

$$k_{\theta\theta}^e = \frac{8\mu r^3}{3(1 - \nu)} \quad (2.24)$$

y la frecuencia adimensional se expresa como

$$a_o = \frac{\omega r}{C_s} = \frac{2\pi}{\sigma} \frac{\omega}{p} \frac{r}{h} \quad (2.25)$$

Introduciendo las expresiones de la rigidez de la estructura y de las impedancias del suelo en la ecuación (2.14) se obtiene

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ -k & K_{xx} & K_{x\theta} \\ 0 & K_{\theta x} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ u_r^c \\ \varphi_r^c \end{bmatrix} + ia_o \begin{bmatrix} \frac{2mp\xi\omega}{a_o} & 0 & 0 \\ \frac{-2mp\xi\omega}{a_o} & C_{xx} & C_{x\theta} \\ 0 & C_{\theta x} & C_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ u_r^c \\ \varphi_r^c \end{bmatrix} - \\
& \omega^2 \begin{bmatrix} m & m & mh \\ 0 & m_o & 0 \\ mh & mh & mh^2 + I_o + I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ u_r^c \\ \varphi_r^c \end{bmatrix} = \\
& \omega^2 \begin{bmatrix} m \\ m_o \\ mh \end{bmatrix} u_g + \omega^2 \begin{bmatrix} mh \\ 0 \\ mh^2 + I_o + I \end{bmatrix} \varphi_g \quad (2.26)
\end{aligned}$$

Sumando las ecuaciones primera y segunda del sistema matricial, la segunda ecuación representará el equilibrio horizontal del conjunto, así

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & K_{xx} & K_{x\theta} \\ 0 & K_{\theta x} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ u_r^c \\ \varphi_r^c \end{bmatrix} + ia_o \begin{bmatrix} \frac{2mp\xi\omega}{a_o} & 0 & 0 \\ 0 & C_{xx} & C_{x\theta} \\ 0 & C_{\theta x} & C_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ u_r^c \\ \varphi_r^c \end{bmatrix} - \\
& \omega^2 \begin{bmatrix} m & m & mh \\ m & m + m_o & mh \\ mh & mh & mh^2 + I_o + I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ u_r^c \\ \varphi_r^c \end{bmatrix} = \\
& \omega^2 \begin{bmatrix} m \\ m + m_o \\ mh \end{bmatrix} u_g + \omega^2 \begin{bmatrix} mh \\ mh \\ mh^2 + I_o + I \end{bmatrix} \varphi_g \quad (2.27)
\end{aligned}$$

Considerando la siguiente expresión para la rigidez de la estructura sin amortiguamiento

$$k = p^2 \cdot m \quad (2.28)$$

la ecuación matricial queda

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} p^2 m & 0 & 0 \\ 0 & K_{xx} & K_{x\theta} \\ 0 & K_{\theta x} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ u_r^c \\ \varphi_r^c \end{bmatrix} + i a_o \begin{bmatrix} \frac{2mp\xi\omega}{a_o} & 0 & 0 \\ 0 & C_{xx} & C_{x\theta} \\ 0 & C_{\theta x} & C_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ u_r^c \\ \varphi_r^c \end{bmatrix} - \\
& \omega^2 \begin{bmatrix} m & m & mh \\ m & m + m_o & mh \\ mh & mh & mh^2 + I_o + I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ u_r^c \\ \varphi_r^c \end{bmatrix} = \\
& \omega^2 \begin{bmatrix} m \\ m + m_o \\ mh \end{bmatrix} u_g + \omega^2 \begin{bmatrix} mh \\ mh \\ mh^2 + I_o + I \end{bmatrix} \varphi_g \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Sacando como factor común la masa de la estructura m a ambos lados de la igualdad y sumando las matrices del primer término de la igualdad, se obtiene

$$\begin{aligned}
& m \begin{bmatrix} p^2 + 2p\omega\xi i - \omega^2 & -\omega^2 & -\omega^2 h \\ -\omega^2 & \frac{\hat{K}_{xx}}{m} - \omega^2 - \omega^2 \frac{m_o}{m} & \frac{\hat{K}_{x\theta}}{m} - \omega^2 h \\ -\omega^2 h & \frac{\hat{K}_{\theta x}}{m} - \omega^2 h & \frac{\hat{K}_{\theta\theta}}{m} - \omega^2 h^2 - \omega^2 \frac{I_o + I}{m} \end{bmatrix} \cdot \\
& \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ u_r^c \\ \varphi_r^c \end{bmatrix} = -m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \frac{m_o}{m} \\ h \end{bmatrix} \ddot{u}_g - m \begin{bmatrix} h \\ h \\ h^2 + \frac{I_o + I}{m} \end{bmatrix} \ddot{\varphi}_g \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Sacando como factor común ω^2/p^2 del primer término de la igualdad se llega a la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
& \frac{\omega^2}{p^2} \begin{bmatrix} \frac{p^2}{\omega^2} + 2\frac{p}{\omega}\xi i - 1 & -1 & -h \\ -1 & \frac{1}{m\omega^2} \hat{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} & \frac{1}{m\omega^2} \hat{K}_{x\theta} - h \\ -h & \frac{1}{m\omega^2} \hat{K}_{\theta x} - h & \frac{1}{m\omega^2} \hat{K}_{\theta\theta} - h^2 - \frac{I_o + I}{m} \end{bmatrix} \cdot \\
& \begin{bmatrix} p^2 \tilde{u} \\ p^2 u_r^c \\ p^2 \varphi_r^c \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \frac{m_o}{m} \\ h \end{bmatrix} \ddot{u}_g - \begin{bmatrix} h \\ h \\ h^2 + \frac{I_o + I}{m} \end{bmatrix} \ddot{\varphi}_g \quad (2.31)
\end{aligned}$$

Dividiendo entre h la última fila de la ecuación y la última columna de la matriz del sistema, la expresión queda

$$\frac{\omega^2}{p^2} \begin{bmatrix} \frac{p^2}{\omega^2} + 2\frac{p}{\omega}\xi_i - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{m\omega^2}\hat{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} & \frac{1}{m\omega^2 h}\hat{K}_{x\theta} - 1 \\ -1 & \frac{1}{m\omega^2 h}\hat{K}_{\theta x} - 1 & \frac{1}{m\omega^2 h^2}\hat{K}_{\theta\theta} - 1^2 - \frac{I_o + I}{mh^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p^2 \tilde{u} \\ p^2 u_r^c \\ p^2 h \varphi_r^c \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \frac{m_o}{m} \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{u}_g - \begin{bmatrix} h \\ h \\ h + \frac{I_o + I}{mh} \end{bmatrix} \ddot{\varphi}_g \quad (2.32)$$

La inercia a giro de la cimentación se expresa como

$$I_o = \frac{m_o r^2}{4} \quad (2.33)$$

Por otra parte, la inercia a giro de la estructura tiene la siguiente expresión

$$I = \frac{m r^2}{4} \quad (2.34)$$

Sustituyendo las expresiones (2.33) y (2.34) en el sistema de ecuaciones (2.32) queda

$$\frac{\omega^2}{p^2} \begin{bmatrix} \frac{p^2}{\omega^2} + 2\frac{p}{\omega}\xi_i - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{m\omega^2}\hat{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} & \frac{1}{m\omega^2}\hat{K}_{x\theta} - 1 \\ -1 & \frac{1}{m\omega^2 h}\hat{K}_{\theta x} - 1 & \frac{1}{m\omega^2 h^2}\hat{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{r^2}{4h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p^2 \tilde{u} \\ p^2 u_r^c \\ p^2 h \varphi_r^c \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \frac{m_o}{m} \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{u}_g - h \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 + \frac{r^2}{4h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{bmatrix} \ddot{\varphi}_g \quad (2.35)$$

A continuación se adimensionalizan los términos de la matriz del sistema (2.35) donde aparecen las expresiones de las impedancias, así el término (2,2) queda

$$\frac{1}{m\omega^2}\hat{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} \quad (2.36)$$

si

$$\tilde{K}_{xx} = \frac{\hat{K}_{xx}}{\mu r} = \frac{8}{2 - \nu} (k_{xx} + i a_o c_{xx}) \quad (2.37)$$

sustituyendo en la ecuación (2.36):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m\omega^2} \frac{8\mu r}{2 - \nu} (k_{xx} + i a_o c_{xx}) - 1 - \frac{m_o}{m} = \\ & = \frac{1}{m\omega^2} \mu r \left[\frac{8}{2 - \nu} (k_{xx} + i a_o c_{xx}) \right] - 1 - \frac{m_o}{m} = \frac{1}{m\omega^2} \mu r \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Procediendo de forma análoga con el término (3,3) de la matriz del sistema (2.35) se tiene

$$\frac{1}{m\omega^2 h^2} \hat{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{b^2}{4h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m} \right) \quad (2.39)$$

si:

$$\tilde{K}_{\theta\theta} = \frac{\hat{K}_{\theta\theta}}{\mu r^3} = \frac{8}{3(1 - \nu)} (k_{\theta\theta} + i a_o c_{\theta\theta}) \quad (2.40)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.39) queda

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m\omega^2 h^2} \hat{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{r^2}{4h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m} \right) = \\ & \frac{1}{m\omega^2 h^2} \mu r^3 \left[\frac{8}{3(1 - \nu)} (k_{\theta\theta} + i a_o c_{\theta\theta}) \right] - 1 - \frac{r^2}{4h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m} \right) = \\ & \frac{1}{m\omega^2 h^2} \mu r^3 \cdot \tilde{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{r^2}{4h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m} \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Sustituyendo la expresión de la velocidad de propagación en el suelo C_s (2.16) en las ecuaciones (2.38) y (2.41), respectivamente, se obtiene:

$$\frac{1}{m\omega^2} \mu r \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} = \frac{1}{m\omega^2} C_s^2 \rho r \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{m\omega^2 h^2} \mu r^3 \cdot \tilde{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{r^2}{4h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) = \\ \frac{1}{m\omega^2 h^2} C_s^2 \rho r^3 \cdot \tilde{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{r^2}{4h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Despejando ρ de la ecuación (2.18) se obtiene:

$$\rho = \frac{m}{\delta \pi r^2 h} \quad (2.44)$$

Sustituyendo esta expresión en las ecuaciones (2.42) y (2.43) se obtiene

$$\frac{1}{m\omega^2} C_s^2 \rho r \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} = \frac{1}{m\omega^2} C_s^2 \frac{m}{\delta \pi r^2 h} r \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{m\omega^2 h^2} C_s^2 \rho r^3 \cdot \tilde{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{r^2}{4h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) = \\ \frac{1}{m\omega^2 h^2} C_s^2 \frac{m}{\delta \pi r^2 h} r^3 \cdot \tilde{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{r^2}{4h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Despejando C_s de la ecuación (2.15) y sustituyendo f por su expresión (2.17) se obtiene

$$C_s = \sigma \frac{p}{2\pi} h \quad (2.47)$$

Sustituyendo esta expresión en las ecuaciones (2.45) y (2.46) queda

$$\begin{aligned} \frac{1}{m\omega^2} C_s^2 \frac{m}{\delta \pi r^2 h} r \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} = \frac{1}{m\omega^2} \sigma^2 \frac{p^2}{4\pi^2} h^2 \frac{m}{\delta \pi r^2 h} r \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} = \\ \frac{p^2}{\omega^2} \sigma^2 \frac{1}{4\pi^3} \frac{h}{r} \frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{m\omega^2 h^2} C_s^2 \frac{m}{\delta \pi r^2 h} r^3 \cdot \tilde{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{r^2}{4h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) = \\ \frac{p^2}{\omega^2} \sigma^2 \frac{1}{4\pi^3} \frac{r}{h} \frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{r^2}{4h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas, (2.48) y (2.49), en la ecuación del sistema (2.35) en los términos (2,2) y (3,3) respectivamente, la ecuación matricial queda:

$$\frac{\omega^2}{p^2} \begin{bmatrix} \frac{p^2}{\omega^2} + 2\frac{p}{\omega}\xi i - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{4\pi^3} \frac{h}{r} \frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} & \frac{1}{m\omega^2} \hat{K}_{x\theta} - 1 \\ -1 & \frac{1}{m\omega^2 h} \hat{K}_{\theta x} - 1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{4\pi^3} \frac{r}{h} \frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{r^2}{4h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^2 \tilde{u} \\ p^2 u_r^c \\ p^2 h \varphi_r^c \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \frac{m_o}{m} \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{u}_g - h \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 + \frac{r^2}{4h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{bmatrix} \ddot{\varphi}_g \quad (2.50)$$

Analizando los términos de la matriz donde aparecen las impedancias cruzadas se obtiene:

$$\frac{1}{m\omega^2 h} \mu r^2 \tilde{K}_{x\theta} - 1 = \frac{p^2}{\omega^2} \sigma^2 \frac{1}{\delta} \frac{1}{4\pi^3} \tilde{K}_{x\theta} - 1 \quad (2.51)$$

$$\frac{1}{m\omega^2 h} \mu r^2 \tilde{K}_{\theta x} - 1 = \frac{p^2}{\omega^2} \sigma^2 \frac{1}{\delta} \frac{1}{4\pi^3} \tilde{K}_{\theta x} - 1 \quad (2.52)$$

Sustituyendo las expresiones (2.51) y (2.52) en la ecuación (2.50):

$$\frac{\omega^2}{p^2} \begin{bmatrix} \frac{p^2}{\omega^2} + 2\frac{p}{\omega}\xi i - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{4\pi^3} \frac{h}{r} \frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{\delta} \frac{1}{4\pi^3} \tilde{K}_{x\theta} - 1 \\ -1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{\delta} \frac{1}{4\pi^3} \tilde{K}_{\theta x} - 1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{4\pi^3} \frac{r}{h} \frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{r^2}{4h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^2 \tilde{u} \\ p^2 u_r^c \\ p^2 h \varphi_r^c \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \frac{m_o}{m} \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{u}_g - h \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 + \frac{r^2}{4h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{bmatrix} \ddot{\varphi}_g \quad (2.53)$$

lo que es igual que

$$\frac{\omega^2}{p^2} \begin{bmatrix} \frac{p^2}{\omega^2} + 2\frac{p}{\omega}\xi i - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{4\pi^3} \frac{h}{r} \frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{\delta} \frac{1}{4\pi^3} \tilde{K}_{x\theta} - 1 \\ -1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{\delta} \frac{1}{4\pi^3} \tilde{K}_{\theta x} - 1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{4\pi^3} \frac{r}{h} \frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{r^2}{4h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p^2 \tilde{u} \\ p^2 u_r^c \\ p^2 h \varphi_r^c \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \frac{m_o}{m} \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{u}_g - \frac{h}{r} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 + \frac{r^2}{4h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{bmatrix} (\ddot{\varphi}r)_g \quad (2.54)$$

2.6.2. Estructura con amortiguamiento histerético

Las ecuaciones del problema, considerando amortiguamiento histerético para el material de la estructura, se obtienen siguiendo el procedimiento descrito en el apartado 2.6.1, sustituyendo la expresión del amortiguamiento viscoso (2.19) por la siguiente expresión para amortiguamiento histerético

$$K = k(1 + 2\xi i) \quad (2.55)$$

De este modo las ecuaciones del problema quedan

$$\frac{\omega^2}{p^2} \begin{bmatrix} \frac{p^2}{\omega^2}(1 + 2\xi i) - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{4\pi^3} \frac{h}{r} \frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{\delta} \frac{1}{4\pi^3} \tilde{K}_{x\theta} - 1 \\ -1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{\delta} \frac{1}{4\pi^3} \tilde{K}_{\theta x} - 1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{4\pi^3} \frac{r}{h} \frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{r^2}{4h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p^2 \tilde{u} \\ p^2 u_r^c \\ p^2 h \varphi_r^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \frac{m_o}{m} \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{u}_g + \frac{h}{r} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 + \frac{r^2}{4h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{bmatrix} (\ddot{\varphi}r)_g \quad (2.56)$$

2.7. Respuesta del sistema en base rígida

Los resultados para el valor de $\sigma = \infty$ se han obtenido empleando la ecuación para el cálculo de la respuesta del sistema en base rígida. A continuación se deduce la expresión de dicha ecuación en los casos de amortiguamiento viscoso y amortiguamiento histerético del material de la estructura.

2.7.1. Estructura con amortiguamiento viscoso

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + k\tilde{u} = -m\ddot{u}_g \quad (2.57)$$

$$[-\omega^2 m + i\omega c + k]\tilde{u} = -m\ddot{u}_g \quad (2.58)$$

$$[-\omega^2 + i\omega 2\xi p + p^2]\tilde{u} = -\ddot{u}_g \quad (2.59)$$

$$\frac{p^2 \tilde{u}}{\ddot{u}_g} = \frac{-1}{1 + 2\xi \frac{\omega}{p} i - \frac{\omega^2}{p^2}} \quad (2.60)$$

2.7.2. Estructura con amortiguamiento histerético

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + k\tilde{u} = -m\ddot{u}_g \quad (2.61)$$

$$[k(1 + 2\xi i) - \omega^2 m]\tilde{u} = -m\ddot{u}_g \quad (2.62)$$

$$[p^2(1 + 2\xi i) - \omega^2]\tilde{u} = -\ddot{u}_g \quad (2.63)$$

$$\frac{p^2 \tilde{u}}{\ddot{u}_g} = \frac{-1}{(1 + 2\xi i) - \frac{\omega^2}{p^2}} \quad (2.64)$$

Capítulo 3

Validación del modelo

3.1. Introducción

En este capítulo, con objeto de validar el modelo presentado en el capítulo 2, se presenta un estudio comparativo de los resultados obtenidos a partir de dicho modelo con otros resultados existentes en la bibliografía.

En este sentido, se han reproducido los resultados obtenidos por *Veletsos & Meek* [3] para cimentaciones superficiales. Las funciones de impedancia del suelo se han tomado de un artículo de *Bielak* [12], que a su vez han sido extraídas de un artículo previo de *Verbic & Veletsos* [2].

En la sección 3.2 se exponen las funciones de impedancias del suelo que aparecen en el artículo de *Bielak* [12], así como las que figuran en el artículo de *Veletsos & Meek* [3], y se realiza un análisis comparativo entre ambas. Posteriormente, en la sección 3.3, se muestran los espectros de respuesta del sistema obtenidos con el modelo propuesto en el capítulo 2, cuyas curvas se presentan superpuestas sobre las obtenidas por *Veletsos & Meek* [3]. Asimismo, se realiza un estudio de la influencia del tipo de amortiguamiento de la estructura, viscoso o histerético, sobre el espectro de respuesta del sistema. Seguidamente, en la sección 3.4 se presenta un análisis de sensibilidad del espectro de respuesta del sistema a la variación del parámetro mo/m , que representa la relación entre la masa de la cimentación y la masa de la estructura. Finalmente, en la sección 3.5, se presentan los resultados de los análisis paramétricos efectuados así como el algoritmo empleado para acometerlos.

3.2. Funciones de impedancia dinámica del suelo

En esta sección se presentan las funciones de impedancia dinámica del suelo empleadas para la validación del modelo. Por otra parte, se exponen los resultados

de un análisis comparativo entre los valores de impedancias propuestos por *Verbic & Veletsos* [2] y los que figuran en el artículo de *Veletsos & Meek* [3]

3.2.1. Impedancias del suelo por *Verbic & Veletsos* [2]

En la caracterización del sistema y a efectos de cálculo se han considerado los valores de las impedancias del suelo que aparecen en el artículo de *Bielak* [12] que fueron obtenidos previamente en una publicación de *Verbic & Veletsos* [2].

Las impedancias adimensionales del problema son \hat{K}_{xx} , $\hat{K}_{\theta\theta}$, $\hat{K}_{x\theta}$ y $\hat{K}_{\theta x}$. De las cuales $\hat{K}_{x\theta}$ y $\hat{K}_{\theta x}$ son iguales, como consecuencia de teoremas de reciprocidad. Las funciones de impedancia se expresan como

$$\hat{K}_{xx} = k_{xx}^e \cdot (k_{xx} + ia_o C_{xx}) = K_{xx} + ia_o C_{xx} \quad (3.1)$$

$$\hat{K}_{\theta\theta} = k_{\theta\theta}^e \cdot (k_{\theta\theta} + ia_o C_{\theta\theta}) = K_{\theta\theta} + ia_o C_{\theta\theta} \quad (3.2)$$

$$\hat{K}_{x\theta} = \hat{K}_{\theta x} = -k_{xx}^e \cdot (k_{x\theta} + ia_o C_{x\theta}) = K_{x\theta} + ia_o C_{x\theta} \quad (3.3)$$

donde

$$a_o = \frac{\omega r}{C_s} \quad (3.4)$$

y las rigideces estáticas se expresan como

$$k_{xx}^e = \frac{8\mu r}{2 - \nu} \quad (3.5)$$

$$k_{\theta\theta}^e = \frac{8\mu r^3}{3(1 - \nu)} \quad (3.6)$$

Las funciones K_{xx} , $K_{\theta\theta}$, C_{xx} y $C_{\theta\theta}$ representan la parte real e imaginaria, respectivamente, de las funciones de impedancia correspondientes a las reacciones del suelo sobre el cimiento. Éstas pueden calcularse a partir de resultados numéricos disponibles [23] [24] para valores del parámetro de frecuencia a_o hasta 10 y para varios valores del coeficiente de Poisson del suelo, ν . En este caso, dichas funciones se calcularon a partir de las soluciones aproximadas presentadas por *Verbic & Veletsos* [2]

$$k_{xx} = 1 \quad (3.7)$$

$$c_{xx} = b_1 \quad (3.8)$$

$$k_{\theta\theta} = 1 - \frac{b_1((b_2 \cdot a_o)^2)}{1 + (b_2 \cdot a_o)^2 - b_3 \cdot a_o^2} \quad (3.9)$$

$$c_{\theta\theta} = \frac{b_1 b_2 (b_2 \cdot a_o)^2}{1 + (b_2 a_o)^2} \quad (3.10)$$

donde b_1 , b_2 y b_3 son valores adimensionales que dependen de ν , tal y como se muestra en la tabla:

Tabla 3.1: Valores de b_i (según Verbic & Veletsos [2])

	ν			
	0	$\frac{1}{3}$	0,45	0,5
b_1	0,525	0,5	0,45	0,4
b_2	0,8	0,8	0,8	0,8
b_3	0	0	0,023	0,027

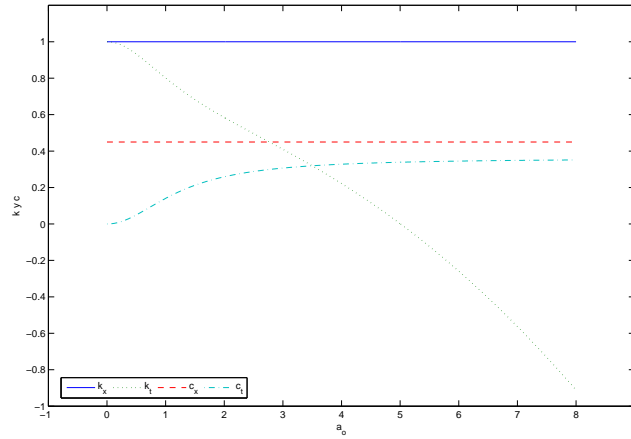


Figura 3.1: Coeficientes adimensionales de las impedancias del suelo, para el caso de cimentación superficial, por Verbic & Veletsos [2]

3.2.2. Impedancias del suelo por *Veletsos & Meek* [3]

Los cálculos realizados se han verificado también utilizando los valores para las impedancias propuestos por *Veletsos & Meek* [3]. Las expresiones de las funciones de impedancia, en este caso, son las siguientes

$$K_{xx} = \alpha_x K \quad (3.11)$$

$$K_{\theta\theta} = \alpha_\theta K \quad (3.12)$$

$$C_{xx} = \beta_x \frac{Kr}{C_s} \quad (3.13)$$

$$C_{\theta\theta} = \beta_\theta \frac{Kr}{C_s} \quad (3.14)$$

donde

$$K = \frac{8}{2 - \nu} \mu r \quad (3.15)$$

Las expresiones de K_{xx} , $K_{\theta\theta}$, C_{xx} y $C_{\theta\theta}$ representan la parte real e imaginaria, respectivamente, de las funciones de impedancia correspondientes a las reacciones del suelo sobre el cimiento.

Los factores α_x , α_θ , β_x y β_θ , son factores adimensionales que dependen del coeficiente de Poisson para el material del suelo ν , y del parámetro de frecuencia adimensional

$$a_o = \frac{\omega r}{C_s} \quad (3.16)$$

Los valores de α y β para un suelo con $\nu = 0,45$ son los que se muestran en la *Figura 3.2*. Estas curvas han sido digitalizadas a partir de las curvas que figuran en el artículo de *Veletsos & Meek* [3] están basadas en datos de un artículo de *Veletsos & Wei* [24], donde también aparecen los datos correspondientes para otros valores de ν .

3.2.3. Impedancias del suelo: *Veletsos & Meek* [3] vs *Verbic & Veletsos* [3]

En esta sección se realiza un análisis comparativo de las expresiones de las impedancias según *Veletsos & Meek* [3] y *Verbic & Veletsos* [2].

La razón por la que se acomete este análisis es la detección de una posible errata, en la expresión de *Veletsos & Meek* [3] para $C_{\theta\theta}$, durante el proceso de

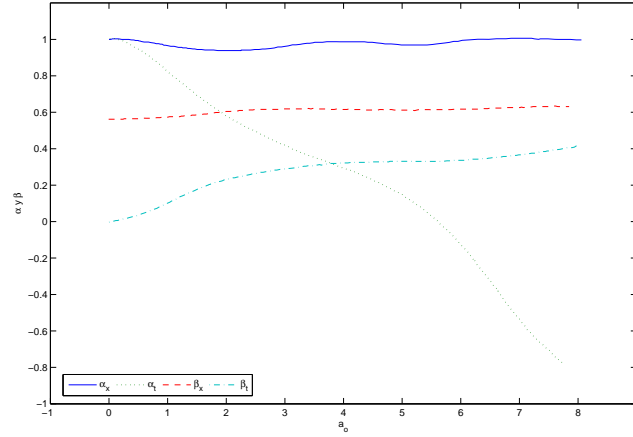


Figura 3.2: Coeficientes adimensionales de las impedancias del suelo, para el caso de cimentación superficial, por Veletsos & Meek [3]

adimensionalización de las ecuaciones del sistema haciendo uso de dichas expresiones.

La imposibilidad de adimensionalizar las ecuaciones del sistema implementando la expresión de $C_{\theta\theta}$ propuesta en el citado artículo, motivó la siguiente comparación entre las expresiones de ambos autores con el objetivo de verificar si concuerdan o no.

Partiendo de la hipótesis de que las expresiones (3.12) y (3.14) deberían estar multiplicadas por r^2 . Siendo así, para un valor de $\nu = 0,45$ se cumpliría que

$$k_{\theta} = 1,06 \cdot \alpha_{\theta} \quad (3.17)$$

$$c_{\theta} = 1,06 \cdot \beta_{\theta} \quad (3.18)$$

En la *Figura 3.3* se representan los coeficientes adimensionales de las impedancias del suelo definidas en el artículo de *Veletsos & Meek* [3], representados con trazo azul, frente a los definidos en el artículo de *Verbic & Veletsos* [2], representados en trazo verde discontinuo, así como estos últimos una vez aplicada la corrección explicada anteriormente, representados con línea de puntos en color rojo.

En la *Figura 3.4* se muestra el espectro de respuesta de un sistema con cimentación superficial de masa despreciable, excitado armónicamente, considerando el giro nulo $\ddot{\varphi}_g = 0$, y amortiguamiento viscoso para el material de la estructura. Se representan de manera superpuesta las curvas obtenidas considerando las ex-

Tabla 3.2: Funciones de impedancia dinámica del suelo para el caso de cimentación superficial. Verbic & Veletsos vs Veletsos & Meek

Verbic & Veletsos	Veletsos & Meek
$\tilde{K}_j = K_j + ia_o C_j$ $a_o = \frac{\omega r}{C_s}$	
$\tilde{K}_j = k_j^e [k_j + ia_o c_j]$ $k_x^e = \frac{8}{2-\nu} \mu r$ $k_\theta^e = \frac{8}{3(1-\nu)} \mu r^3$	$\tilde{K}_j = K[\alpha_j + ia_o \beta_j]$ $K = \frac{8}{2-\nu} \mu r$
$\tilde{K}_x = \frac{8}{2-\nu} \mu r [k_x + ia_o c_x]$	$\tilde{K}_x = \frac{8}{2-\nu} \mu r [\alpha_x + ia_o \beta_x]$
$k_x = \alpha_x ; c_x = \beta_x$	
$K_\theta = \frac{8}{3(1-\nu)} \mu r^3 [k_\theta + ia_o c_\theta]$	$K_\theta = \frac{8}{3(1-\nu)} \mu r [\alpha_\theta + ia_o \beta_\theta]$
$k_\theta = \frac{3(1-\nu)}{(2-\nu)r^2} \alpha_\theta ; c_\theta = \frac{3(1-\nu)}{(2-\nu)r^2} \beta_\theta$	

presiones para las impedancias del suelo propuestas por *Veletsos & Meek* [3], con trazo azul, las obtenidas para las impedancias del suelo propuestas en el artículo de *Bielak* [12], con trazo verde discontinuo, y por último las curvas digitalizadas del artículo de *Veletsos & Meek* [3], con línea de puntos en color rojo.

Se observa como la curva del espectro de respuesta obtenido a partir de las expresiones propuestas en el artículo de *Veletsos & Meek* [3] para las impedancias del suelo, en color azul, no se corresponde con las otras dos representadas. Esto corrobora la hipótesis de la existencia de una errata en las expresiones para las impedancias propuestas en dicho artículo. Por este motivo, para los cálculos expuestos se han empleado las expresiones para las impedancias del suelo que figuran en el artículo de *Bielak* [12].

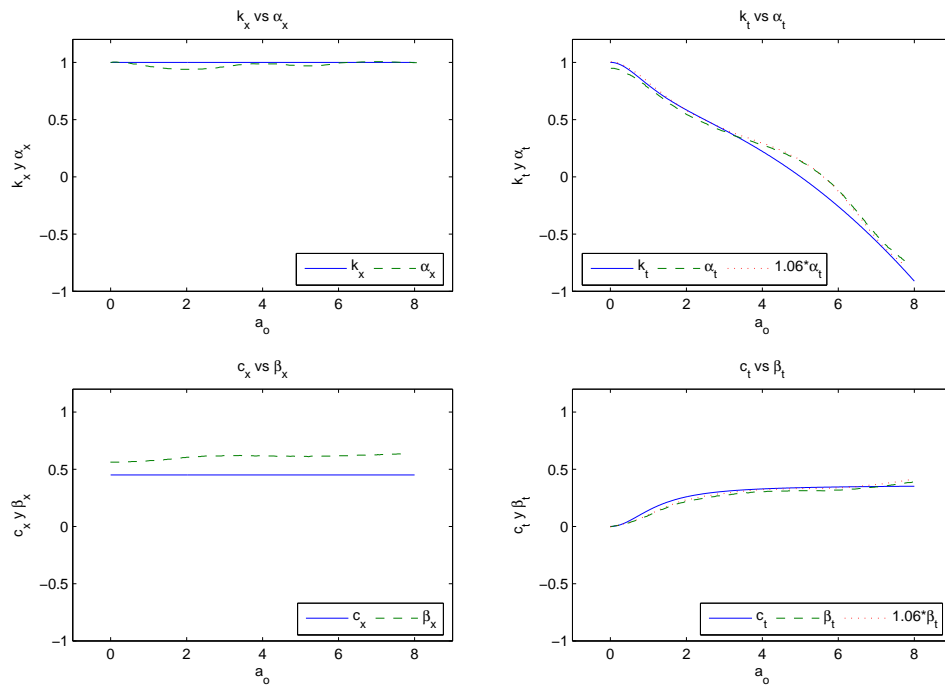


Figura 3.3: Coeficientes adimensionales de las impedancias del suelo para el caso de cimentación superficial [3] [2]

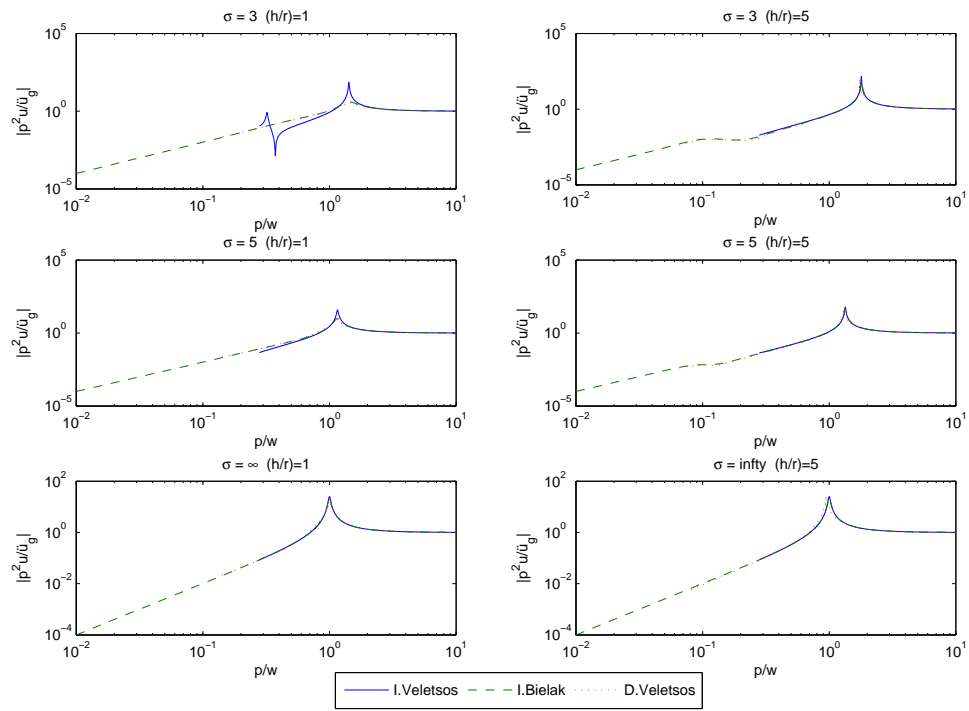


Figura 3.4: Espectro de respuesta para el caso de cimentación superficial. Impedancias de Veletsos & Meek vs Impedancias de Bielak

3.3. Cimentaciones superficiales de masa despreciable

En esta sección se reproducen los resultados obtenidos por *Veletsos & Meek* [3] para el espectro de respuesta del sistema considerando cimentaciones superficiales de masa despreciable.

En el caso de las cimentaciones superficiales no existe impedancia cruzada $\hat{K}_{x\theta} = \hat{K}_{\theta x} = 0$. Despreciando la masa de la cimentación $m_o = 0$ e $I_o = 0$ y si se considera nulo el giro del campo incidente, $\ddot{\varphi}_g = 0$, se obtienen las ecuaciones del problema.

3.3.0.1. Amortiguamiento Viscoso

En el caso de que el material de la estructura tuviera amortiguamiento viscoso, las ecuaciones del problema quedan

$$\frac{\omega^2}{p^2} \begin{bmatrix} \frac{p^2}{\omega^2} + 2\frac{p}{\omega}\xi_i - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2\frac{1}{4\pi^3}\frac{h}{r}\frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2\frac{1}{4\pi^3}\frac{r}{h}\frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{r^2}{4h^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p^2\tilde{u} \\ p^2u_r^c \\ p^2h\varphi_r^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{u}_g \quad (3.19)$$

donde, en este caso, $\xi = 0,02$, $\delta = 0,15$ y $\nu = 0,45$.

En las Figuras 3.5, 3.6 y 3.7 se muestran, con trazo verde discontinuo, los resultados obtenidos utilizando los valores de las impedancias del suelo propuestos en el artículo de *Bielak* [12] y se contrastan con los obtenidos de la digitalización de las curvas de las Figuras 4 y 5 del artículo de *Veletsos & Meek* [3], representados con trazo azul.

La respuesta de la estructura se ha expresado en términos del espectro de respuesta de su deformación lateral, definido como $abs(p^2u/\ddot{u}_g)$, donde $p = 2\pi f$ es la frecuencia fundamental de la estructura en base rígida y $\ddot{u}_g = \omega^2 u_g$, siendo ω la frecuencia de excitación y u_g el desplazamiento horizontal en campo libre en la superficie del suelo. La utilidad de esta variable deriva del hecho de que el producto de este valor por la masa de la estructura y la aceleración horizontal en campo libre correspondiente a nivel de la superficie se corresponde con la amplitud del esfuerzo cortante en la base de la estructura.

Los resultados para el valor de $\sigma = \infty$ se han obtenido empleando la ecuación para el cálculo de la respuesta del sistema en base rígida.

$$\frac{p^2 \tilde{u}}{\ddot{u}_g} = \frac{-1}{1 + 2\xi \frac{\omega}{p} i - \frac{\omega^2}{p^2}} \quad (3.20)$$

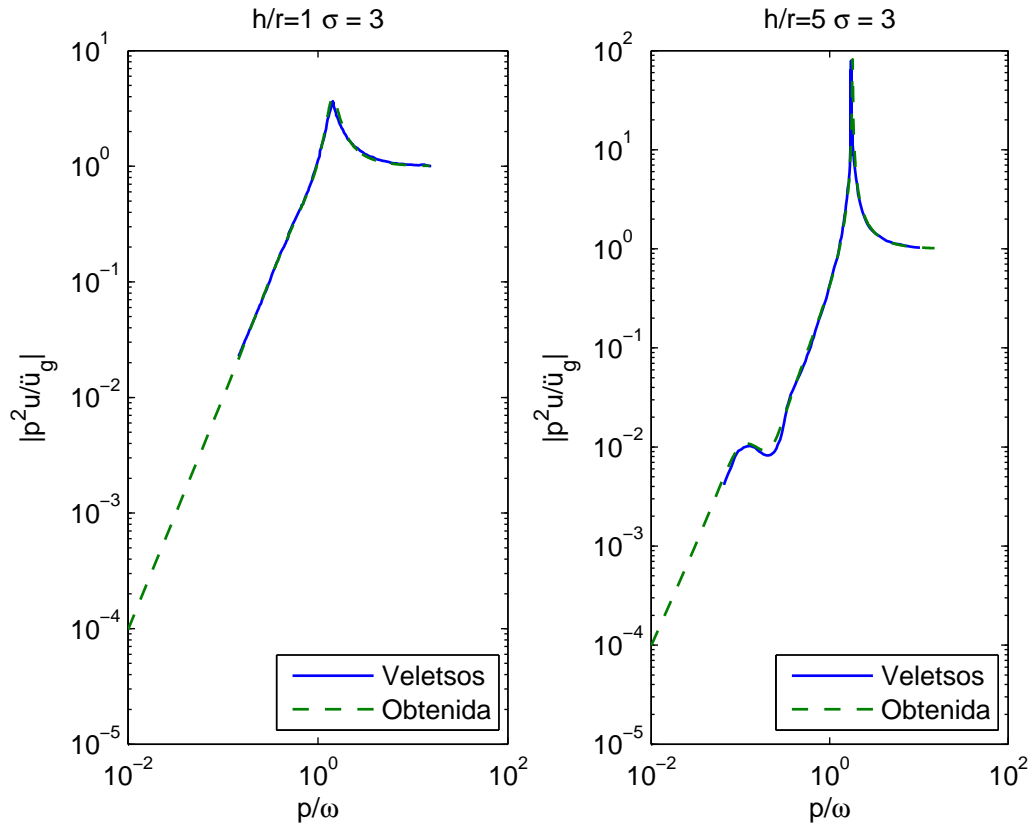


Figura 3.5: Reproducción de los resultados de Veletsos & Meek [3] para el espectro de respuesta $\sigma = 3$

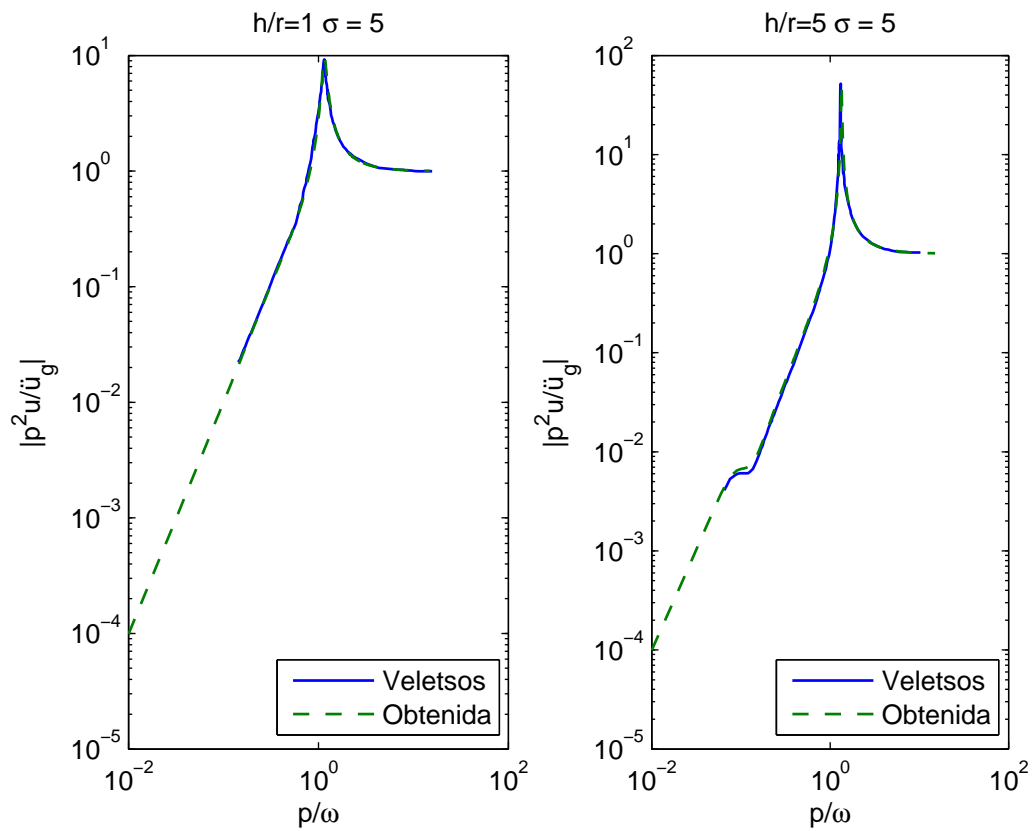


Figura 3.6: Reproducción de los resultados de Veletsos & Meek [3] para el espectro de respuesta $\sigma = 5$

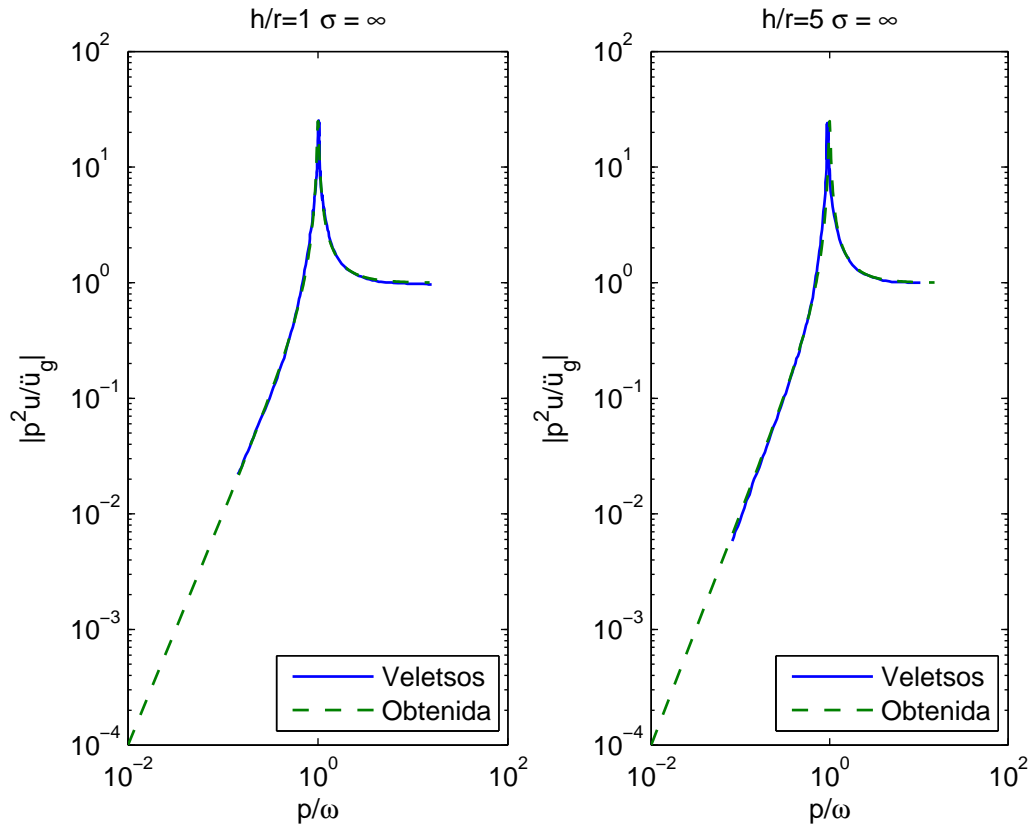


Figura 3.7: Reproducción de los resultados de Veletsos & Meek [3] para el espectro de respuesta $\sigma = \infty$

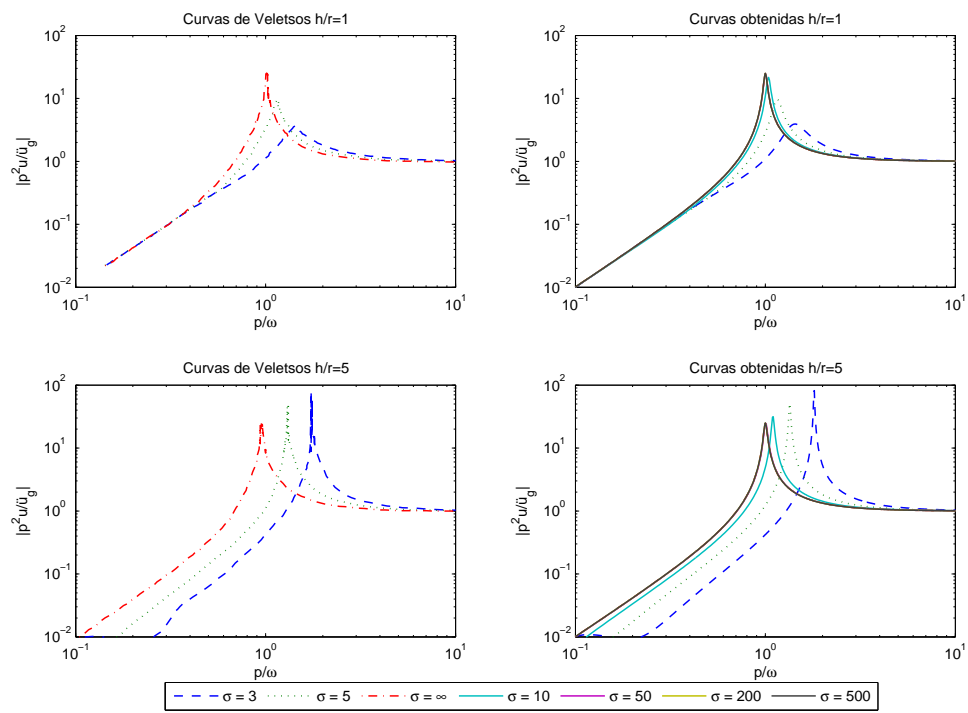


Figura 3.8: Espectro de respuesta para varios valores de σ , para el caso de cimentación superficial, considerando amortiguamiento viscoso de la estructura

La información presentada en las *Figura 3.8* revela, tal y como señalan *Veletsos & Meek* [3], que la interacción suelo-estructura tiene dos efectos principales:

1. Disminuye la frecuencia de resonancia del sistema hasta un valor inferior al aplicable a la estructura en base rígida, desplazando el máximo del espectro de respuesta hacia la derecha.
2. Modifica la magnitud de la respuesta máxima, disminuyendo el valor para estructuras no esbeltas y aumentando el valor para estructuras altas y esbeltas.

Estos cambios son función de los parámetros σ y h/r . A menor valor de σ o a mayor valor de h/r , los dos efectos de la interacción se vuelven más pronunciados.

Debido al incremento de flexibilidad del cimiento, el sistema en el que se considera la interacción suelo-estructura es un sistema menos rígido y tiene una menor frecuencia de resonancia que el sistema en base rígida. Así se explica el primer efecto.

El segundo efecto, que aparenta ser contradictorio a primera vista, no es tan obvio y requiere una explicación más detenida. El cambio en la magnitud de la repuesta máxima es el resultado de dos mecanismos opuestos. Debido a la energía que se disipa por radiación dentro del medio de soporte, el amortiguamiento eficaz de la estructura en base flexible es mayor que el de la estructura en base rígida, y esto tiende a disminuir la respuesta del sistema con interacción suelo-estructura. Sin embargo, el giro de la cimentación aumenta la aceleración de la masa y la fuerza de inercia asociada, y este efecto conduce a un incremento de la respuesta. En lo referente a las razones que se apuntan en los siguientes párrafos, el primer factor es el dominante para estructuras bajas, mientras que el segundo factor es el dominante para el caso de estructuras altas.

En el caso de estructuras no esbeltas ($h/r = 1$), el pequeño aumento de la respuesta debido al giro de la cimentación está más que compensado por la gran reducción de la respuesta debida a la disipación por radiación de la tensión.

En el caso de estructuras esbeltas ($h/r = 5$), el movimiento de giro de la cimentación y el aumento de la respuesta asociado es, obviamente, bastante importante. En cambio, la reducción en la respuesta debida al efecto de radiación es extremadamente pequeña. En este caso, el efecto resultante es un aumento en la respuesta y una reducción en el amortiguamiento eficaz del sistema. Debe tenerse en cuenta, sin embargo, que el efecto del amortiguamiento del material del semiespacio no se ha incorporado en esta solución. La consideración de este efecto aumentaría el amortiguamiento eficaz del sistema con interacción suelo-estructura y disminuiría su respuesta.

3.3.0.2. Discusión del espectro de respuesta en base rígida

En las curvas del gráfico de la *Figura 3.7*, se observa cómo el valor máximo de la respuesta del sistema se produce para un valor del cociente entre la frecuencia natural de vibración del sistema y la frecuencia de la excitación p/w muy próximo a la unidad. Esto es correcto y puede comprobarse a partir de la expresión para la frecuencia de vibración libre de un sistema amortiguado [25]

$$p_D = p\sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.21)$$

donde

p_D es la frecuencia natural en rad/s de la estructura sobre base rígida y con un coeficiente de amortiguamiento ξ .

p es la frecuencia natural en rad/s de la estructura sobre base rígida y sin amortiguamiento.

Sustituyendo en esta expresión el valor del coeficiente de amortiguamiento que se ha empleado en los cálculos efectuados hasta el momento, $\xi = 0,02$, se obtiene un valor de la frecuencia de vibración del sistema de $p_D = 0,9998 \approx 1$.

Dado que se trata de un sistema amortiguado, $\xi = 0,02$, el valor de p/w debe ser distinto de uno. Con el objetivo de esclarecer esta duda y verificar que las expresiones y los cálculos efectuados en este sentido son correctos, se muestra un estudio de la respuesta máxima del sistema en el entorno de $p/w = 1$ para distintos valores del coeficiente de amortiguamiento ξ . En la *Figura 3.9* se observa un desplazamiento del máximo de la respuesta hacia la derecha con el aumento del coeficiente de amortiguamiento ξ , así como una reducción de la amplitud de la misma.

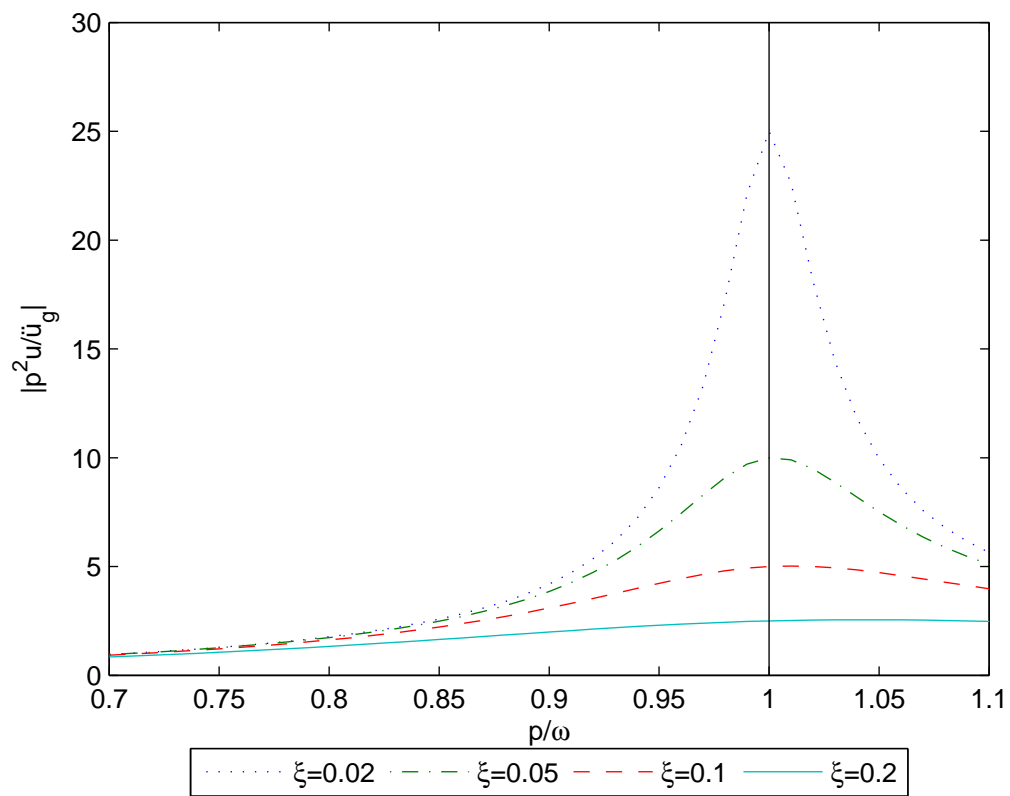


Figura 3.9: Análisis de sensibilidad de la respuesta máxima al coeficiente de amortiguamiento ξ

3.3.1. Amortiguamiento Histerético

En el caso de que el material de la estructura tuviera amortiguamiento histerético, las ecuaciones del problema quedan

$$\frac{\omega^2}{p^2} \begin{bmatrix} \frac{p^2}{\omega^2}(1 + 2\xi i) - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{4\pi^3} \frac{h}{r} \frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{4\pi^3} \frac{r}{h} \frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{r^2}{4h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^2 \tilde{u} \\ p^2 u_r^c \\ p^2 h \varphi_r^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{u}_g \quad (3.22)$$

donde, en este caso, $\xi = 0,02$, $\delta = 0,15$ y $\nu = 0,45$.

En las Figuras 3.10, 3.11 y 3.12 se muestran, con trazo verde discontinuo, los resultados obtenidos utilizando los valores de las impedancias del suelo propuestos en el artículo de *Bielak* [12] y se contrastan con los obtenidos de la digitalización de las curvas de las Figuras 4 y 5 del artículo de *Veletsos & Meek* [3], representados con trazo azul.

Los resultados para el valor de $\sigma = \infty$ se han obtenido empleando la ecuación para el cálculo de la respuesta del sistema en base rígida.

$$\frac{p^2 \tilde{u}}{\ddot{u}_g} = \frac{-1}{(1 + 2\xi i) - \frac{\omega^2}{p^2}} \quad (3.23)$$

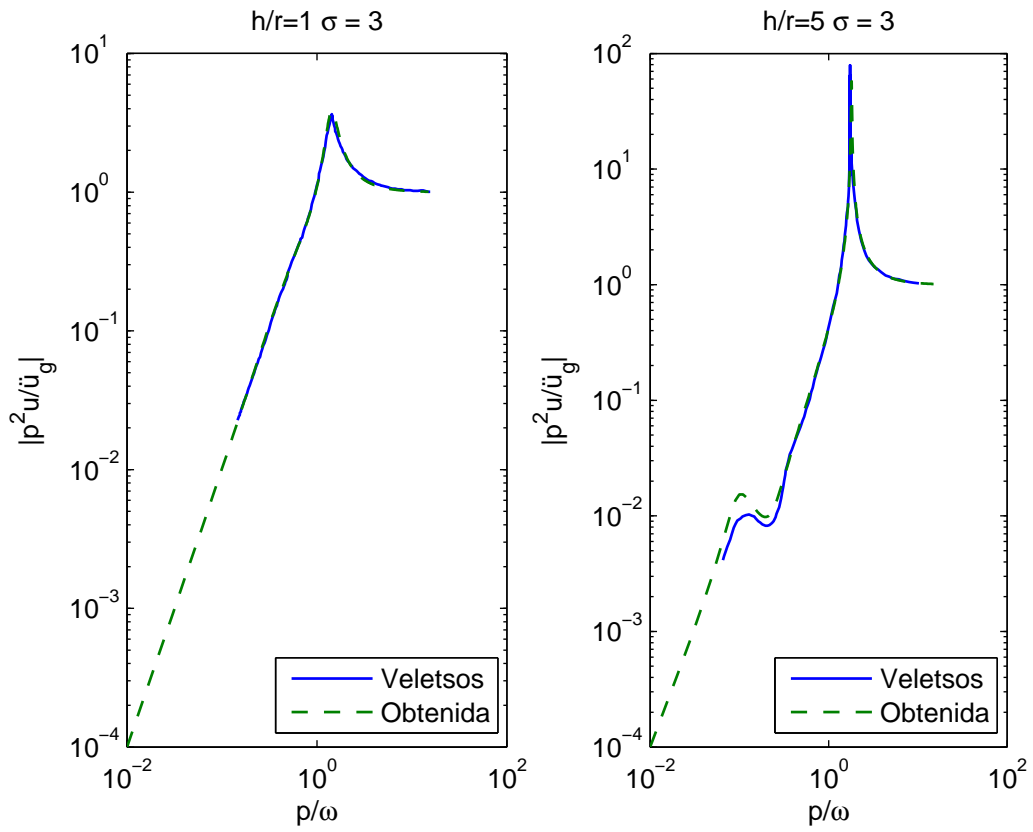


Figura 3.10: Espectro de respuesta para $\sigma = 3$, para el caso de cimentación superficial, considerando amortiguamiento histerético de la estructura

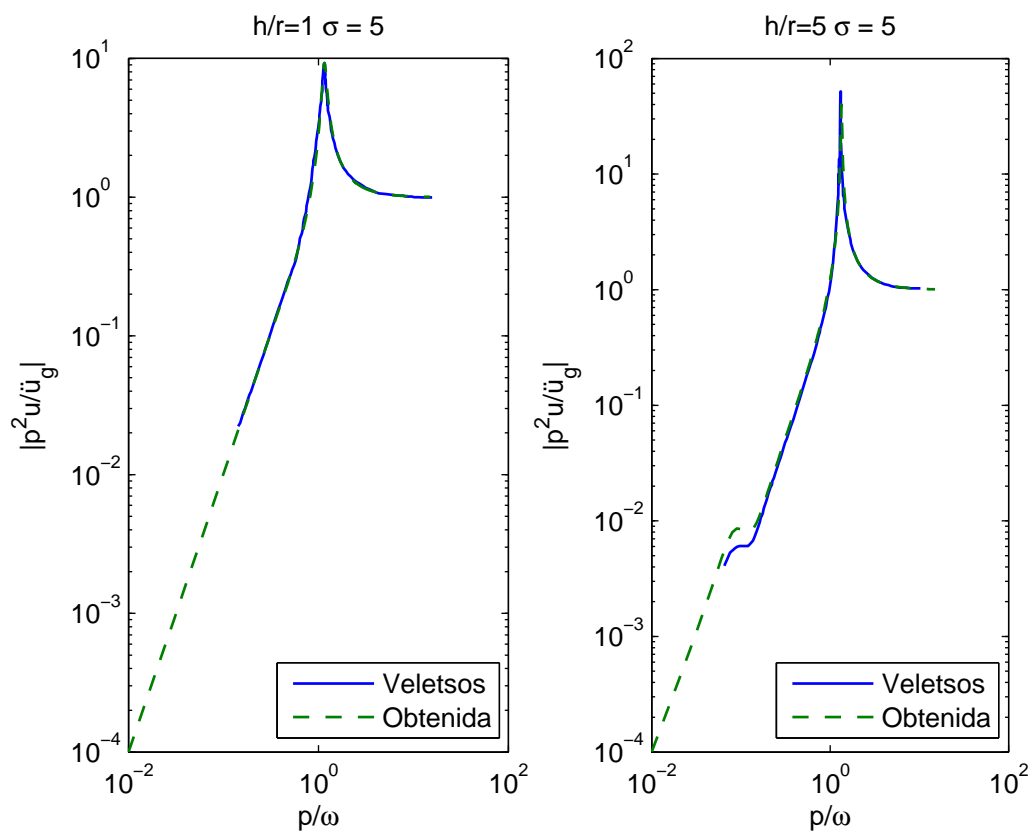


Figura 3.11: Espectro de respuesta para $\sigma = 5$, para el caso de cimentación superficial, considerando amortiguamiento histerético de la estructura

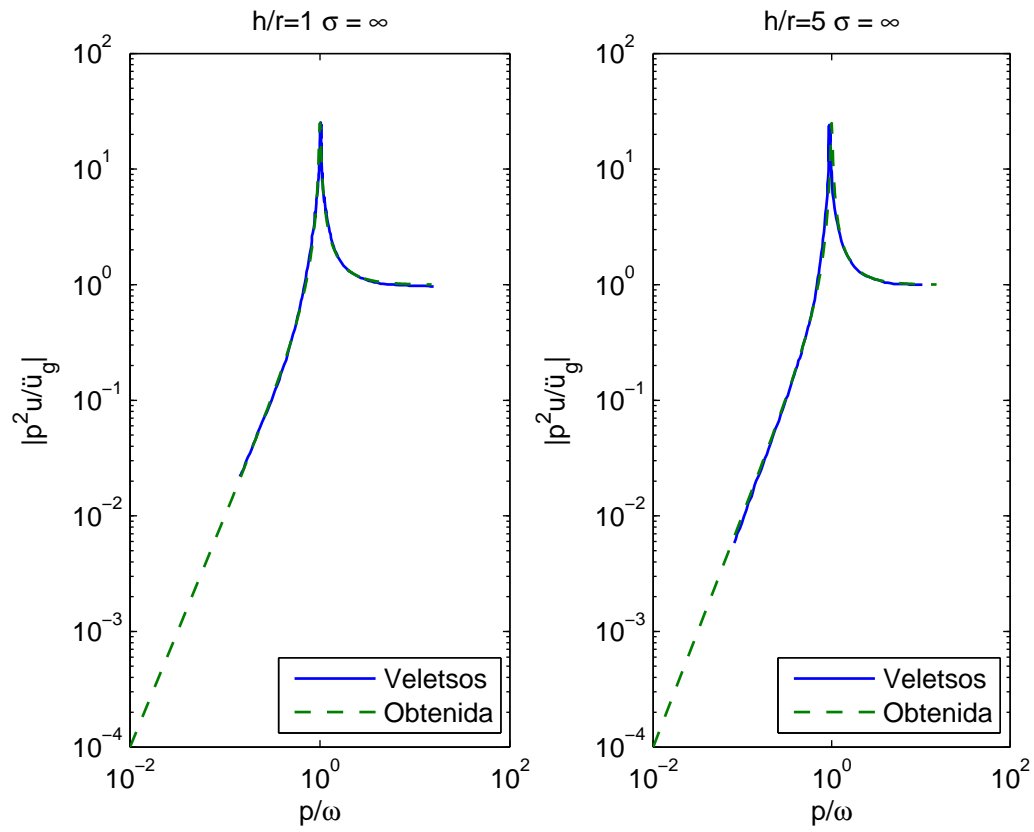


Figura 3.12: *Espectro de respuesta para $\sigma = \infty$, para el caso de cimentación superficial, considerando amortiguamiento histerético de la estructura*

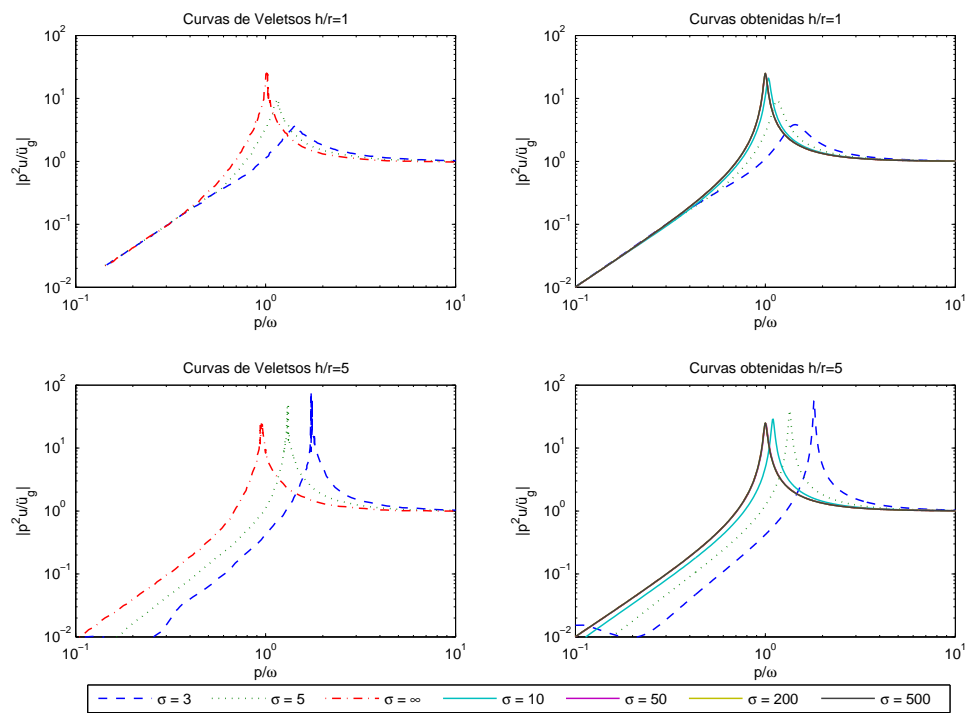


Figura 3.13: Espectro de respuesta para varios valores de σ , para el caso de cimentación superficial, considerando amortiguamiento histerético de la estructura

3.3.2. Análisis de la influencia del tipo de amortiguamiento de la estructura en la respuesta

En la *Figura 3.14* se muestra la superposición de las curvas obtenidas para el espectro de respuesta en el caso de amortiguamiento viscoso del material de la estructura, representada con trazo verde discontinuo, y para el caso de amortiguamiento histerético, en trazo azul.

Puede observarse como el espectro de respuesta apenas se ve afectado, en este caso, por el tipo de amortiguamiento de la estructura.

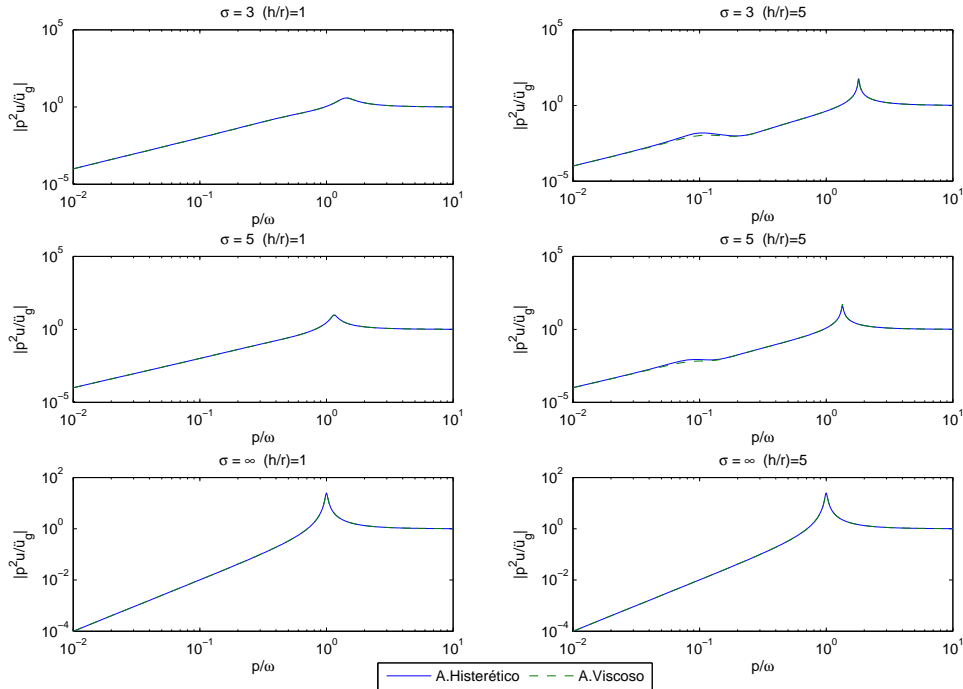


Figura 3.14: Espectro de respuesta, para el caso de cimentación superficial, en función del tipo de amortiguamiento de la estructura

3.4. Cimentaciones superficiales con masa no despreciable

En este apartado se pretende contrastar la validez de la simplificación que adoptan muchos autores al despreciar la masa de la cimentación superficial en los cálculos. Para ello se ha realizado un análisis de sensibilidad del espectro de respuesta a la variación del parámetro m_o/m , que representa la relación entre la masa de la cimentación y la masa de la estructura.

En el caso de las cimentaciones superficiales no existe impedancia cruzada $K_{x\theta} = K_{\theta x} = 0$. Si se considera nulo el giro del campo incidente, $\ddot{\varphi}_g = 0$, se obtienen las siguientes ecuaciones del problema para el caso de amortiguamiento viscoso.

$$\frac{\omega^2}{p^2} \begin{bmatrix} \frac{p^2}{\omega^2} + 2\frac{p}{\omega}\xi i - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2\frac{1}{4\pi^3}\frac{h}{r}\frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2\frac{h}{r}\frac{1}{\delta}\frac{1}{4\pi^3}\tilde{K}_{x\theta} - 1 \\ -1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2\frac{h}{r}\frac{1}{\delta}\frac{1}{4\pi^3}\tilde{K}_{\theta x} - 1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2\frac{1}{4\pi^3}\frac{r}{h}\frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{r^2}{4h^2}\left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p^2\tilde{u} \\ p^2u_r^c \\ p^2h\varphi_r^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \frac{m_o}{m} \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{u}_g \quad (3.24)$$

donde, en este caso, $\xi = 0,02$, $\delta = 0,15$ y $\nu = 0,45$.

Del análisis de los gráficos mostrados en las *Figuras 3.15 y 3.16* puede extraerse la conclusión de que el valor del parámetro m_o/m , que representa la relación entre la masa de la cimentación y la masa de la estructura, no afecta al valor máximo del espectro de respuesta. Del mismo modo, se observa que dicho parámetro sólo afecta al espectro de respuesta para valores de la relación p/ω , que representa el cociente entre la frecuencia natural de vibración del sistema y la frecuencia de excitación, inferiores a 0,5.

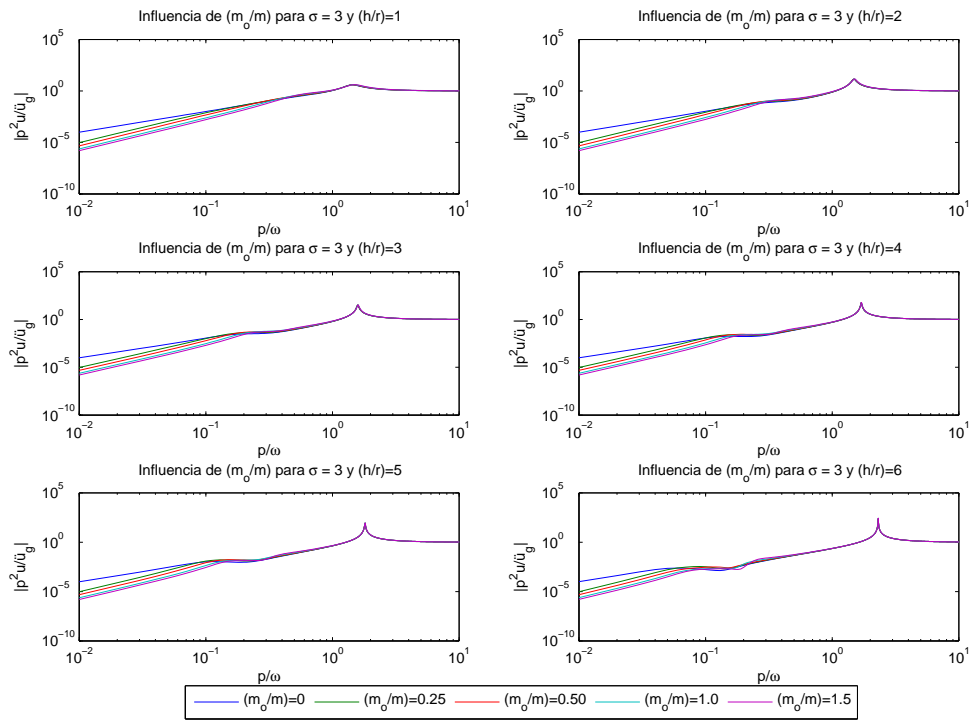


Figura 3.15: Análisis de sensibilidad del espectro de respuesta, en el caso de cimentación superficial, al parámetro $\frac{m_o}{m}$ para $\sigma = 3$

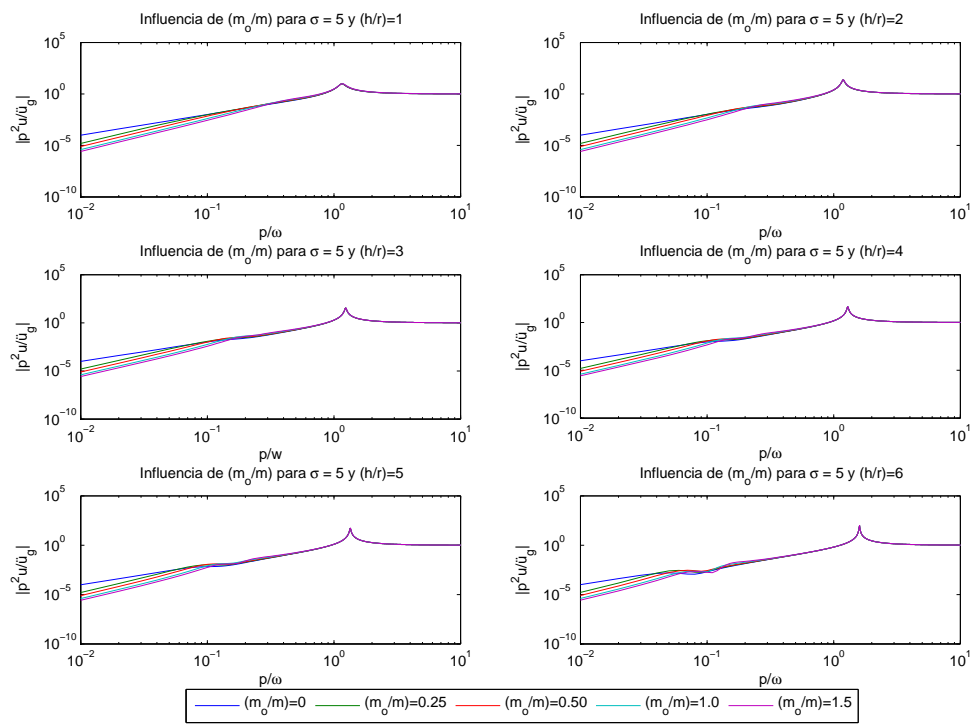


Figura 3.16: Análisis de sensibilidad del espectro de respuesta, en el caso de cimentación superficial, al parámetro $\frac{m_o}{m}$ para $\sigma = 5$

3.5. Estudio de la frecuencia natural y el factor de amortiguamiento del sistema

En este apartado se estudia la influencia del parámetro σ , que representa la rigidez relativa entre la estructura y el suelo, en la variación de la frecuencia de resonancia del sistema, así como en la magnitud de la respuesta máxima del mismo.

La frecuencia de resonancia del sistema puede expresarse por el ratio ω/p . Por otra parte, la magnitud de la respuesta máxima del sistema puede asociarse a el ratio de amortiguamiento ξ de un oscilador equivalente de un solo grado de libertad.

Se ha reemplazado el sistema objeto de estudio (*Figura 2.2*) por un sistema de un grado de libertad oscilador. En adelante, la frecuencia circular natural del sistema estará denotada por $\tilde{p} = 2\pi\tilde{f}$, y la fracción de amortiguamiento crítico asociada denotado por $\tilde{\xi}$.

El sistema de un grado de libertad de reemplazo corresponde al modelo físico que se muestra en la *Figura 3.17*. En esta representación, el resorte conectado a la base representa la flexibilidad de la cimentación, el resorte conectado a la masa representa la flexibilidad de la estructura y el amortiguador simula el amortiguamiento general del sistema.

Si $w(t)$ representa la deformación del oscilador de reemplazo, esta deformación debe estar repartida entre los dos resortes de forma inversamente proporcional a sus rigideces respectivas. Dado que la rigidez del resorte asociado a la estructura es proporcional a f^2 , mientras que la rigidez total del oscilador es proporcional a \tilde{f}^2 , se deduce que la deformación de la estructura, $u(t)$, está relacionada con la

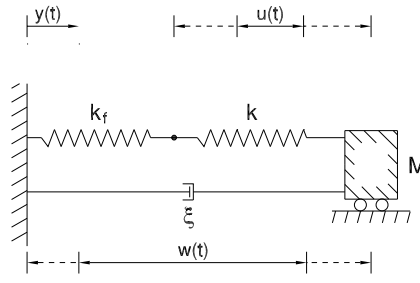


Figura 3.17: Sistema de un grado de libertad que reemplaza al sistema objeto de estudio. [3]

deformación total, $w(t)$, por la ecuación

$$u(t) = \left(\frac{\tilde{f}}{f} \right)^2 w(t) \quad (3.25)$$

Los valores de \tilde{f}/f y $\tilde{\xi}$ del oscilador de reemplazo se han representado en las *Figuras 3.19 y 3.20* en función de σ para tres valores distintos de h/r . Los valores de los parámetros restantes se han definido en apartados anteriores.

3.5.1. Procedimiento de cálculo

Se ha utilizado un procedimiento iterativo que busca el máximo del espectro armónico para distintos valores de σ . El algoritmo que rige este procedimiento iterativo parte de un valor de $\sigma = \sigma_{min}$, siendo σ_{min} próximo a cero, este caso correspondería con el supuesto de estructuras muy rígidas o suelos poco rígidos. Para $\sigma = \sigma_{min}$ el algoritmo comienza asumiendo $\tilde{f} = f$ y por tanto $p/\omega = 1$ y se calculan, resolviendo el sistema de ecuaciones (2.56), los valores de la respuesta para $p/\omega^{(i)} - \Delta(p/\omega)$, $p/\omega^{(i)}$ y $p/\omega^{(i)} + \Delta(p/\omega)$, siendo $\Delta(p/\omega) \rightarrow 0,9$. Dado que se sabe que estas curvas son suaves, el punto de búsqueda se mueve en la dirección de valor creciente de la respuesta, hasta que alcanza un máximo. En este punto, el algoritmo aumenta la precisión de la búsqueda haciendo $\Delta(p/\omega) \rightarrow 0$ y repite el procedimiento descrito hasta alcanzar el valor del máximo. En este momento el valor de $p/\omega^{(i)}$ correspondiente es almacenado como la frecuencia de resonancia \tilde{f} del sistema para este valor de σ . A continuación, a medida que el valor de σ crece hasta $\sigma = \sigma_{max}$, se repite el proceso iterativo, esta vez empezando en el último valor computado de p/ω .

El ratio de amortiguamiento equivalente $\tilde{\xi}$ se calcula para cada punto, una vez que se ha obtenido el valor de \tilde{f}/f . Si el mecanismo de amortiguamiento del oscilador de un solo grado de libertad equivalente se considera de naturaleza viscosa, se demuestra que la relación entre el máximo valor de la respuesta Q_m y el ratio de amortiguamiento es [25]

$$\tilde{\xi}^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{Q_m^2 - 1}{Q_m^2}} \right) \quad (3.26)$$

Esta expresión se obtiene a partir de la ecuación de movimiento de un oscilador equivalente como el que se muestra en la *Figura 3.18* que es la siguiente

$$[-\omega^2 m + i\omega c + k]\tilde{u} = -m\ddot{u}_g \quad (3.27)$$

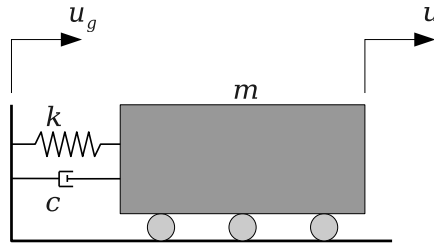


Figura 3.18: Oscilador equivalente. [3]

Algorithm 3.1 Pseudocódigo para el cálculo de $\tilde{f}/f = f(\sigma)$ and $\tilde{\xi} = g(\sigma)$

INPUT: Conjunto de parámetros que definen el sistema: h/r , γ , ξ , m_o/m , impedancias dinámicas de la cimentación; y parámetros del algoritmo σ_{min} , σ_{max} , $\Delta\sigma$, $\Delta p/\omega_{(1)}$ y $\Delta p/\omega_{(2)}$.

$\Delta p/\omega_{(1)} \leftarrow 0,1$

$\Delta p/\omega_{(2)} \leftarrow 0,01$

for $\sigma^{(i)} = \sigma_{min}$ to σ_{max} , in steps of $\Delta\sigma$ **do**

for $j = 1$ to $j = 2$, in steps of 1 **do**

compute propiedades estructurales correspondientes

if $\sigma^{(i)} = \sigma_{min}$ and $j = 1$ **then**

$p/\omega^{(i)} \leftarrow 1$

else if $\sigma^{(i)} \neq \sigma_{min}$ and $j = 1$ **then**

$p/\omega^{(i)} \leftarrow p/\omega^{(i-1)}$

else

$p/\omega^{(i)} \leftarrow p/\omega^{(i)}$

end if

$Q_1^{(i)} = Q(p/\omega^{(i)} - \Delta p/\omega_{(j)})$

$Q_2^{(i)} = Q(p/\omega^{(i)})$

$Q_3^{(i)} = Q(p/\omega^{(i)} + \Delta p/\omega_{(j)})$

do

if $Q_3^{(i)} \geq Q_2^{(i)}$ **then**

$p/\omega^{(i)} \leftarrow p/\omega^{(i)} + \Delta p/\omega_{(j)}$

$Q_1^{(i)} \leftarrow Q_2^{(i)}$

$Q_2^{(i)} \leftarrow Q_3^{(i)}$

$Q_3^{(i)} = Q(p/\omega^{(i)})$

else if $Q_1^{(i)} \geq Q_2^{(i)}$ **then**

$p/\omega^{(i)} \leftarrow p/\omega^{(i)} - \Delta p/\omega_{(j)}$

$Q_3^{(i)} \leftarrow Q_2^{(i)}$

$Q_2^{(i)} \leftarrow Q_1^{(i)}$

$Q_1^{(i)} = Q(p/\omega^{(i)})$

end if

while $(Q_1^{(i)} \geq Q_2^{(i)})$.OR. $(Q_3^{(i)} \geq Q_2^{(i)})$

compute $(\tilde{f}/f^{(i)})$ and $\tilde{\xi}$

end for

end for

OUTPUT: $\sigma^{(i)}$, $(\tilde{f}/f^{(i)})$, $\tilde{\xi}^{(i)}$

3.5.2. Resultados

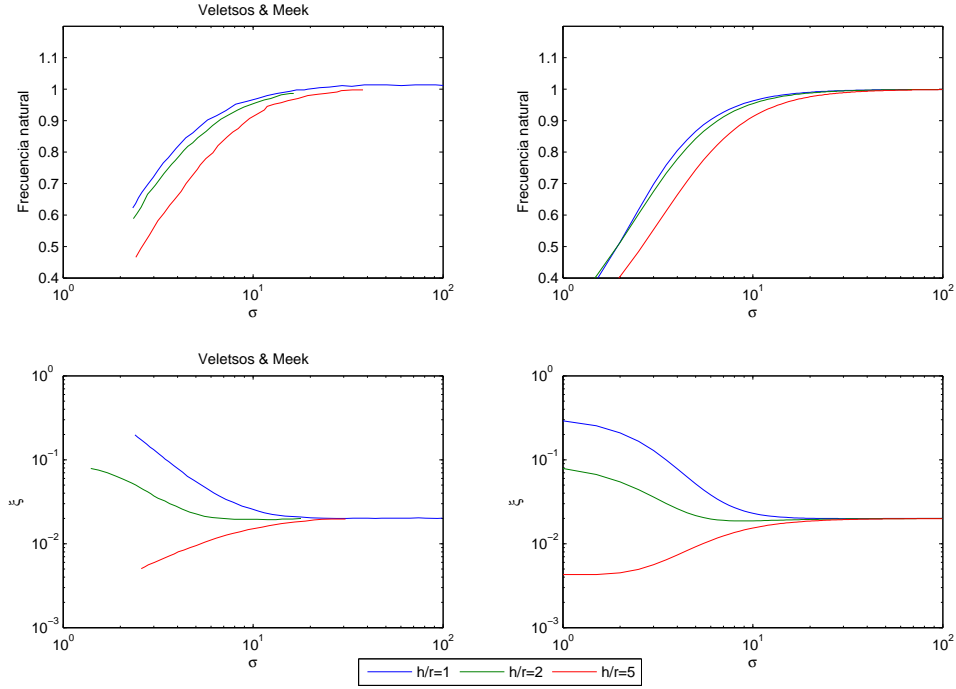


Figura 3.19: Comparación entre los resultados obtenidos con el modelo propuesto y los que figuran en el artículo de Veletsos & Meek [3]

3.5.3. Conclusiones

Del análisis de las Figuras 3.19 y 3.20 se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1. El ratio de frecuencia $\tilde{f}/f \leq 1$, y disminuye para valores decrecientes de σ y para valores crecientes de h/r .
2. El valor del amortiguamiento $\tilde{\xi}$ puede ser mayor o menor que el valor aplicable a una estructura en base rígida dependiendo principalmente del cociente h/r . La interacción suelo-estructura disminuye el amortiguamiento aparente de las estructuras esbeltas y aumenta el de las estructuras no esbeltas. Estos cambios son especialmente significativos para sistemas con valores pequeños de σ .

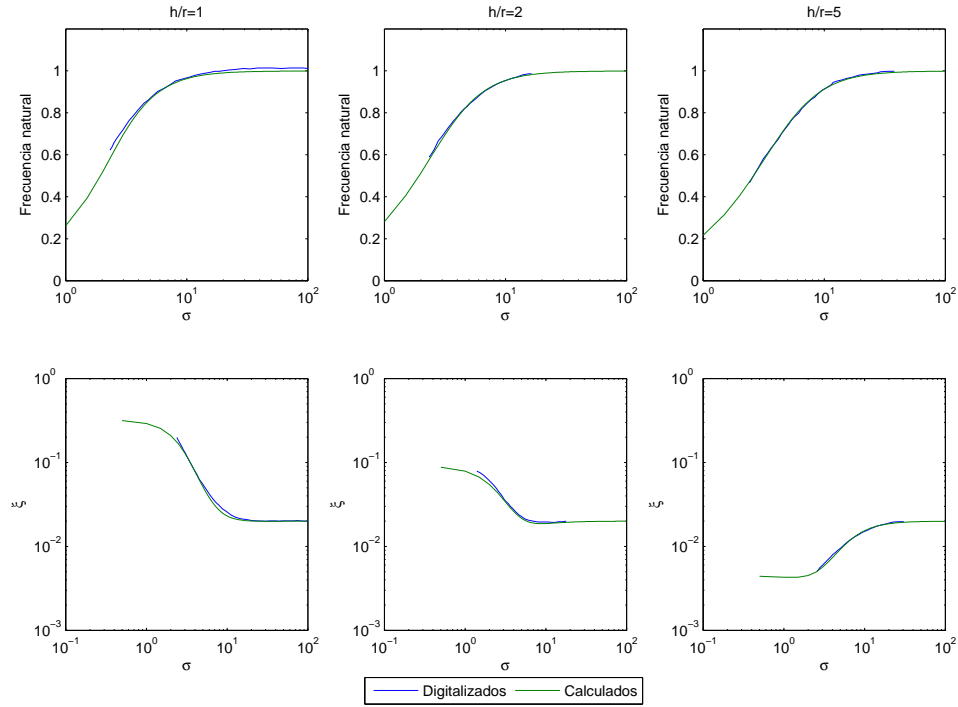


Figura 3.20: Comparación entre los resultados obtenidos con el modelo propuesto y los que figuran en el artículo de Veletsos & Meek [3]

3. Para valores de σ mayores de 20, aproximadamente, los valores de \tilde{f} y $\tilde{\xi}$ son prácticamente iguales a aquellos de los sistemas en base rígida; del mismo modo, el efecto de la interacción es despreciable en este caso.

3.6. Conclusiones

En este capítulo se ha validado el modelo simple de interacción suelo-estructura, basado en la metodología de subestructuración, propuesto en el capítulo 2. Haciendo uso de dicho modelo se han logrado reproducir los resultados obtenidos por Veletsos & Meek [3] para cimentaciones superficiales, tanto en lo referente a los espectros de respuesta del sistema así como en cuanto a la cuantificación del efecto de la interacción suelo-estructura sobre variables de la estructura tales como su frecuencia natural y su amortiguamiento.

Por otra parte, se ha analizado la sensibilidad de la respuesta al tipo de amortiguamiento de la estructura, viscoso o histerético, comprobándose que apenas se aprecian diferencias en el espectro de respuesta entre ambos casos.

Asimismo, se ha realizado un estudio de la influencia sobre la respuesta del parámetro m_o/m , que representa la relación entre la masa de la cimentación y la masa de la estructura, con el objetivo de contrastar la validez de la simplificación que adoptan muchos autores al desprestigiar la masa de la cimentación superficial en los cálculos. Los resultados de este análisis muestran que el parámetro m_o/m no afecta al valor máximo del espectro de respuesta. Del mismo modo, se observa que dicho parámetro sólo afecta al espectro de respuesta para valores de la relación p/ω , que representa el cociente entre la frecuencia natural de vibración del sistema y la frecuencia de excitación, inferiores a 0,5.

Capítulo 4

Aplicación del modelo a la obtención de la respuesta sísmica de estructuras de edificación pilotadas

4.1. Introducción

Este apartado recoge los estudios realizados para cimentaciones pilotadas. La cimentación, que hasta el momento se había idealizado como una placa rígida y circular, se idealizará en adelante como una placa rígida cuadrada. Por otra parte, el amortiguamiento del material de la estructura se ha considerado de tipo histerético.

En la sección 4.2 se explica cómo se han obtenido las funciones de impedancia dinámica del suelo y se muestra la representación gráfica de las mismas. El conjunto de parámetros adimensionales elegidos para definir los sistemas objeto de estudio se enumeran en la sección 4.3. Posteriormente, se presenta el modelo de subestructuración para estructuras de edificación pilotadas en la sección 4.4. Los espectros de respuesta dinámica del sistema, obtenidos con dicho modelo, se presentan en la sección 4.5. Por otra parte, en la sección 4.6, se presentan los resultados de los análisis paramétricos efectuados.

4.2. Funciones de impedancia dinámica del suelo

4.2.1. Metodología

Los valores de las funciones de impedancia dinámica del suelo se han obtenido utilizando el código que resultó de la implementación de un modelo que ya había sido desarrollado en el seno de la División de Mecánica de Medios Continuos y Estructuras del Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería.

Se trata de un modelo acoplado de Elementos de Contorno y Elementos Finitos (MEC-MEF) tridimensional armónico que aprovecha las ventajas de cada metodología para el análisis dinámico directo de estructuras de edificación cimentadas mediante pilotes.

Este modelo cuenta con las ventajas del Método de Elementos de Contorno para representar el terreno donde se asienta la edificación, es decir, su carácter de medio semi-infinito así como la presencia de ondas sísmicas excitadoras, y la simplificación que supone modelar vigas, pilares y pilotes de la estructura como barras mediante el MEF. Este programa, muy desarrollado en la actualidad, ha permitido el análisis de la respuesta de cimentaciones pilotadas, tanto en impedancias como en interacción cinemática [18–20], así como el estudio de la respuesta de la superestructura y de otras estructuras cercanas, sometido el conjunto a trenes de ondas sísmicas con incidencia vertical [21, 22].

4.2.2. Parámetros adimensionales

En todos los casos los pilotes están empotrados en un semiespacio homogéneo, isotrópico y viscoelástico. Las propiedades del sistema [26] son:

1. Coeficiente de amortiguamiento interno del suelo $\xi_s = 0,05$

2. Ratio de densidad suelo-pilote $\frac{\rho_s}{\rho_p} = 0,7$

3. Ratio de aspecto de los pilotes $L/d = 15$

donde L y d son la longitud y el diametro de los pilotes respectivamente.

4. Coeficiente de Poisson del suelo $\nu_s = 0,4$

5. Ratio del módulo de elasticidad pilote-suelo

- Suelo rígido $\frac{E_p}{E_s} = 10^2$
- Suelo blando $\frac{E_p}{E_s} = 10^3$

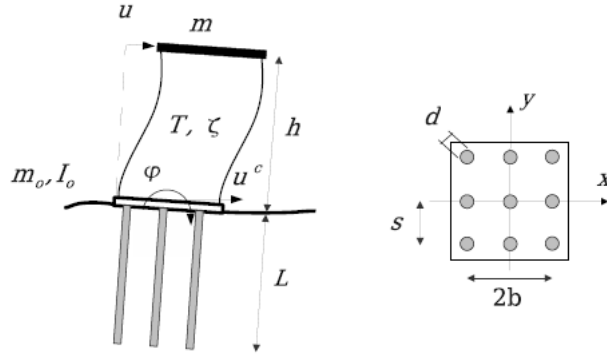


Figura 4.1: Definición del problema

6. Relación entre la separación entre los centros de los pilotes y el diámetro de los mismos $\frac{s}{d} = 2, 5, 10$

7. Frecuencia adimensional

$$a_o = \frac{\omega b}{C_s} = \frac{b \omega d}{d C_s} \quad (4.1)$$

4.2.3. Elección del rango de frecuencias

La elección del rango de valores de la frecuencia adimensional a_o , para el que se obtienen los valores de las impedancias del suelo, viene determinada por la relación entre los parámetros h/b , p/ω y σ expresada de la siguiente manera

$$a_o = \frac{2\pi b \omega}{\sigma h p} \quad (4.2)$$

Las impedancias del suelo se emplean para obtener los espectros de respuesta para valores del ratio de esbeltez h/b de 1, 2 y 5. En ellos se representa la respuesta del sistema para valores de p/ω entre 0,5 y 10.

Posteriormente, se estudia la influencia del parámetro σ , que representa la rigidez relativa entre la estructura y el suelo, en la variación de la frecuencia de resonancia del sistema, así como en la magnitud de la respuesta máxima del mismo. Dicho análisis se realiza para valores del parámetro σ entre 2,5 y 100.

De este modo, se determina que será preciso obtener valores de las impedancias del suelo dentro de un rango de a_o entre 0,01 y 5,03 aproximadamente.

4.2.4. Criterio de normalización

Las funciones de impedancia dinámica del suelo se representan normalizadas de la siguiente manera

$$\tilde{K}_{xx} = \frac{\hat{K}_{xx}}{\mu b} = \frac{8}{2 - \nu} (k_{xx} + i a_o c_{xx}) \quad (4.3)$$

$$\tilde{K}_{zz} = \frac{\hat{K}_{zz}}{\mu b} = \frac{8}{2 - \nu} (k_{zz} + i a_o c_{zz}) \quad (4.4)$$

$$\tilde{K}_{\theta\theta} = \frac{\hat{K}_{\theta\theta}}{\mu b^3} = \frac{8}{3(1 - \nu)} (k_{\theta\theta} + i a_o c_{\theta\theta}) \quad (4.5)$$

$$\tilde{K}_{x\theta} = \frac{\hat{K}_{x\theta}}{\mu b^2} \quad (4.6)$$

La expresión del semiancho de la cimentación b depende de cada caso:

1. Pilote simple: $b = d$
2. Grupo de pilotes 2×2 : $b = \frac{3s}{2}$
3. Grupo de pilotes 3×3 : $b = 2s$
4. Grupo de pilotes 4×4 : $b = \frac{5s}{2}$

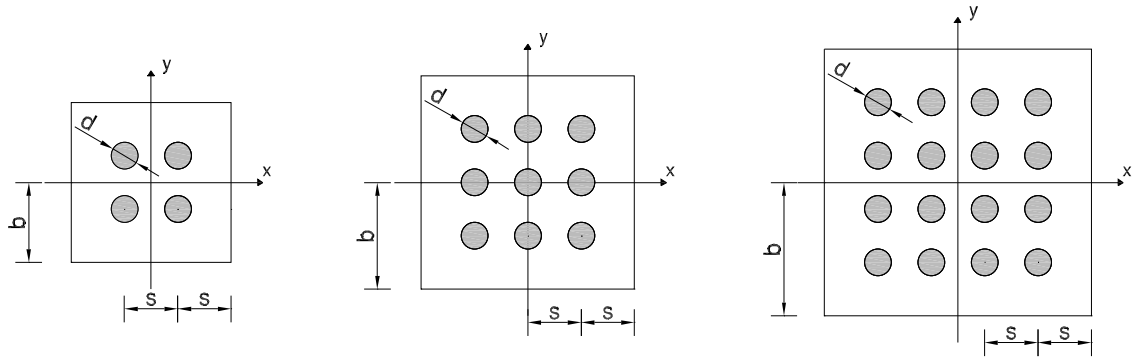


Figura 4.2: Distribución geométrica de los pilotes en grupos de 2×2 , 3×3 y 4×4

4.2.5. Limitaciones de la malla

La malla de la que se dispone es válida para valores de la frecuencia adimensional $0 < a'_o < 1$ expresada de la forma más común

$$a'_o = \frac{\omega d}{C_s} \quad (4.7)$$

donde d es el diámetro de los pilotes.

Sin embargo, en este trabajo se ha empleado la frecuencia adimensional a_o expresada en función del semiancho del encepado b .

$$a_o = \frac{\omega b}{C_s} = \frac{b}{d} \frac{\omega d}{C_s} \quad (4.8)$$

Por este motivo, ha sido necesario estudiar los valores de a_o para los que la malla es apta.

1. Pilote único $\rightarrow b = d \rightarrow a_o = a'_o \rightarrow 0 < a_o < 1$
2. Grupo de 2×2 pilotes $\rightarrow b = 3s/2$
 - a) $s/d = 2 \rightarrow a_o = 3 \cdot a'_o \rightarrow 0 < a_o < 3$
 - b) $s/d = 5 \rightarrow a_o = 7,5 \cdot a'_o \rightarrow 0 < a_o < 7,5$
 - c) $s/d = 10 \rightarrow a_o = 15 \cdot a'_o \rightarrow 0 < a_o < 15$
3. Grupo de 3×3 pilotes $\rightarrow b = 2s$
 - a) $s/d = 2 \rightarrow a_o = 4 \cdot a'_o \rightarrow 0 < a_o < 4$
 - b) $s/d = 5 \rightarrow a_o = 10 \cdot a'_o \rightarrow 0 < a_o < 10$
 - c) $s/d = 10 \rightarrow a_o = 20 \cdot a'_o \rightarrow 0 < a_o < 20$
4. Grupo de 4×4 pilotes $\rightarrow b = 5s/2$
 - a) $s/d = 2 \rightarrow a_o = 5 \cdot a'_o \rightarrow 0 < a_o < 5$
 - b) $s/d = 5 \rightarrow a_o = 12,5 \cdot a'_o \rightarrow 0 < a_o < 12,5$
 - c) $s/d = 10 \rightarrow a_o = 25 \cdot a'_o \rightarrow 0 < a_o < 25$

Dado que el rango de frecuencia adimensional a_o que se desea estudiar es $0,01 < a_o < 5,03$, la malla es apta para los siguientes casos:

1. Grupo de 2×2 pilotes para $s/d = 5, 10$
2. Grupo de 3×3 pilotes para $s/d = 5, 10$
3. Grupo de 4×4 pilotes para $s/d = 2, 5, 10$

4.2.6. Representación gráfica

En este apartado se muestra la representación gráfica de las funciones de impedancia dinámica horizontal, vertical, de cabeceo y cruzadas de grupos de pilotes de 2×2 , 3×3 y 4×4 .

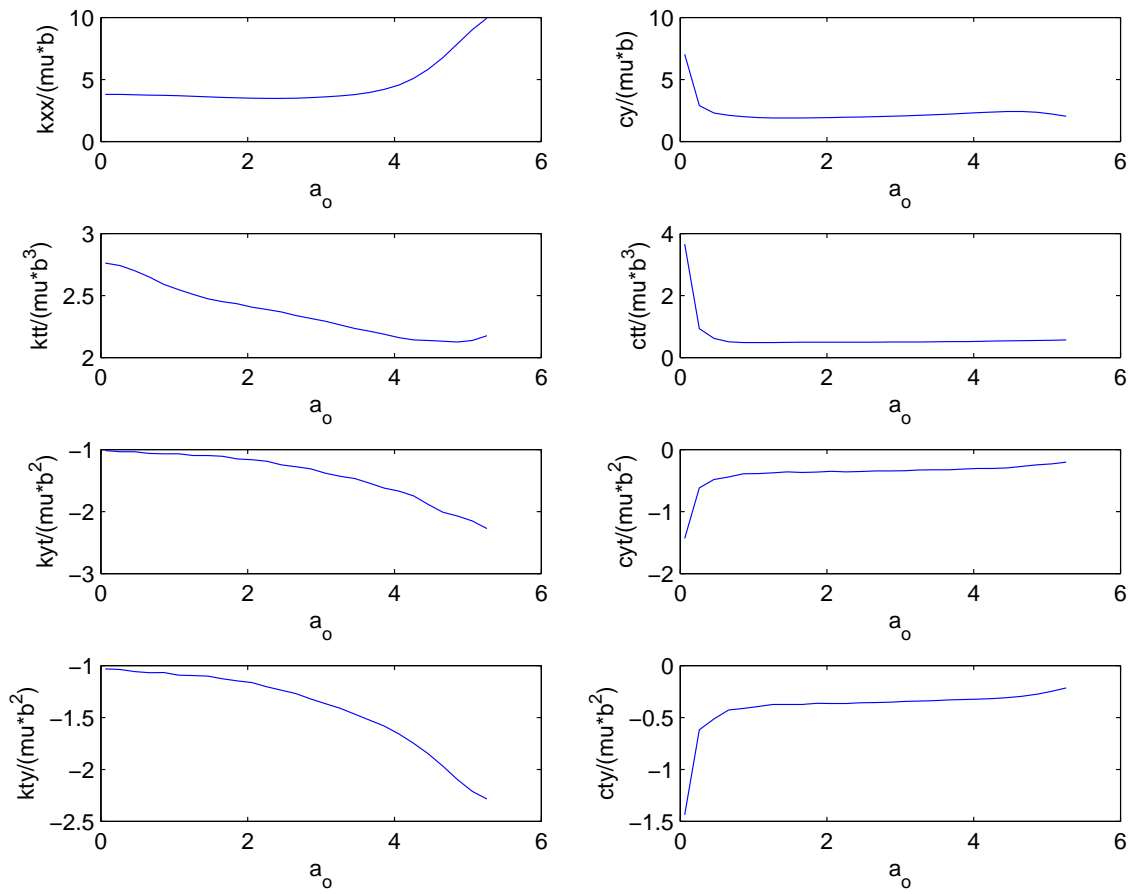


Figura 4.3: Impedancias de un grupo de 2×2 pilotes en suelo flexible ($E_p/E_s = 10^3$). $s/d = 5$

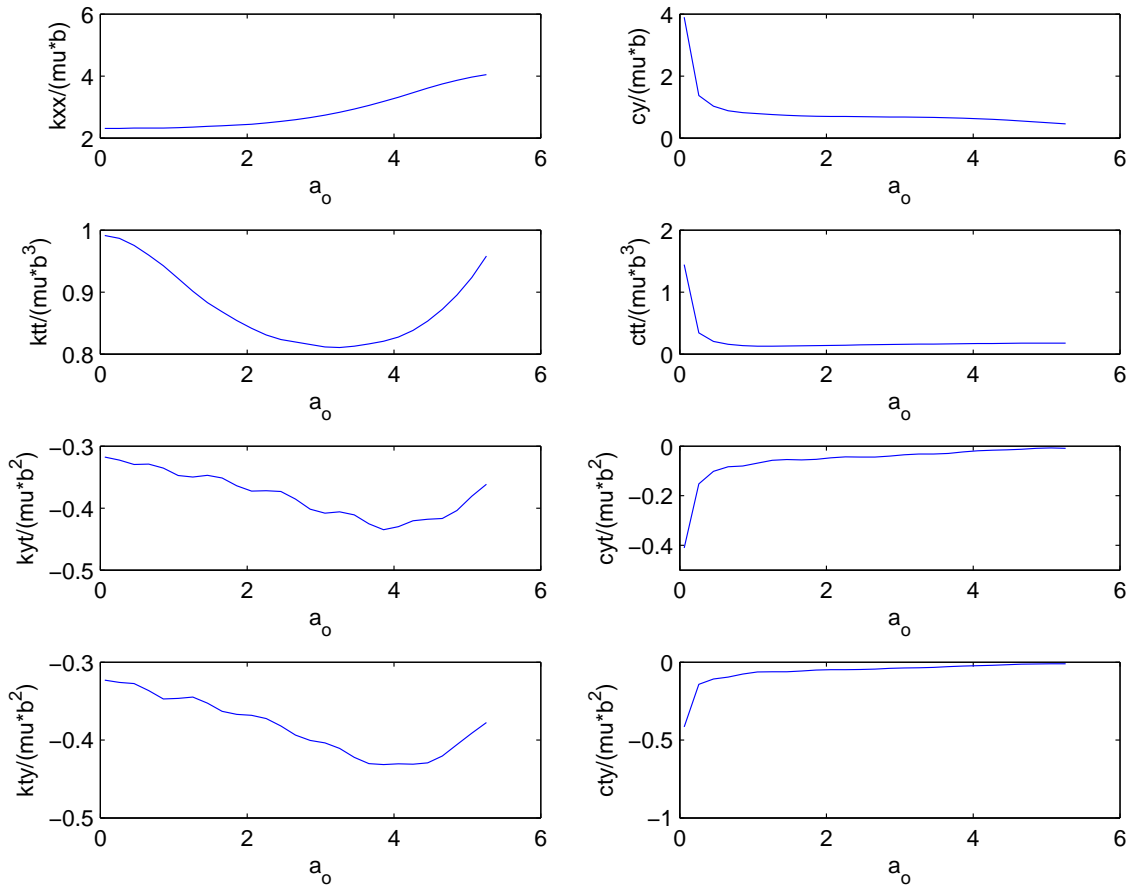


Figura 4.4: Impedancias de un grupo de 2×2 pilotes en suelo flexible ($E_p/E_s = 10^3$). $s/d = 10$

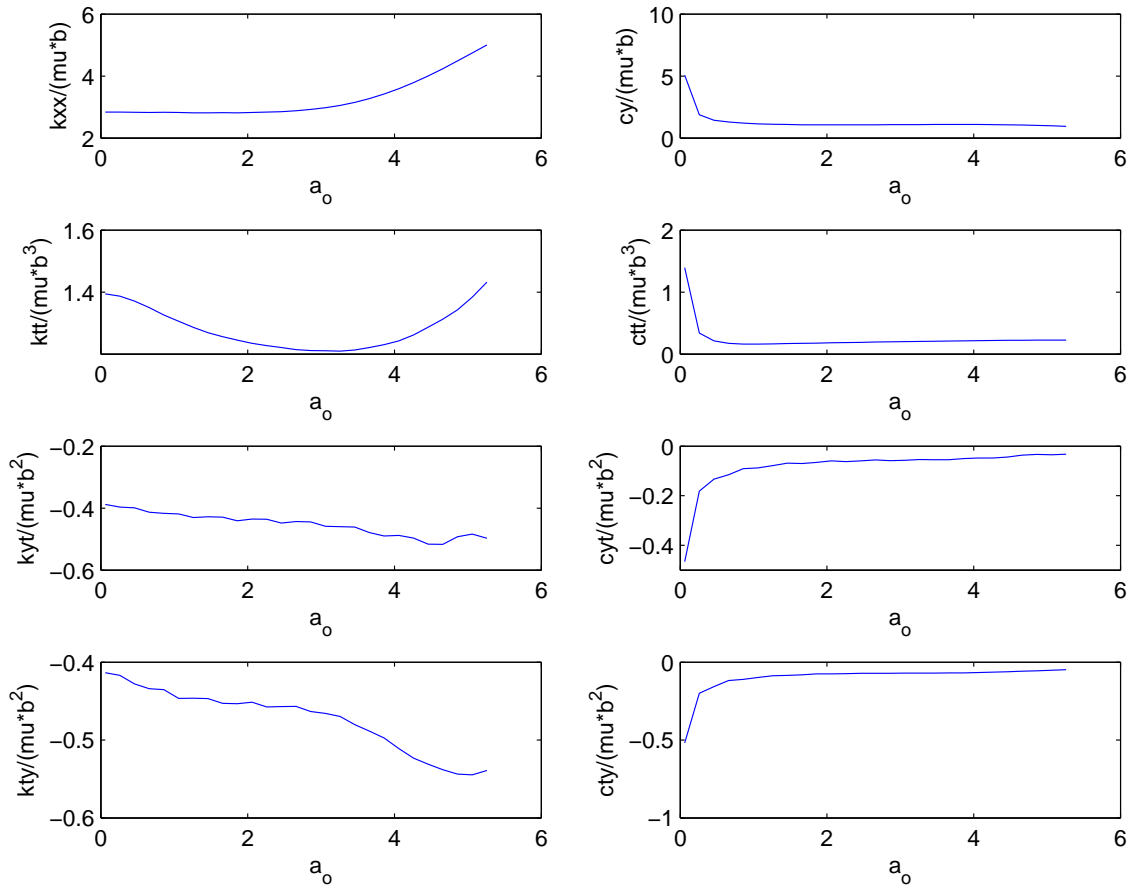


Figura 4.5: Impedancias de un grupo de 2×2 pilotes en suelo rígido ($E_p/E_s = 10^2$). $s/d = 5$

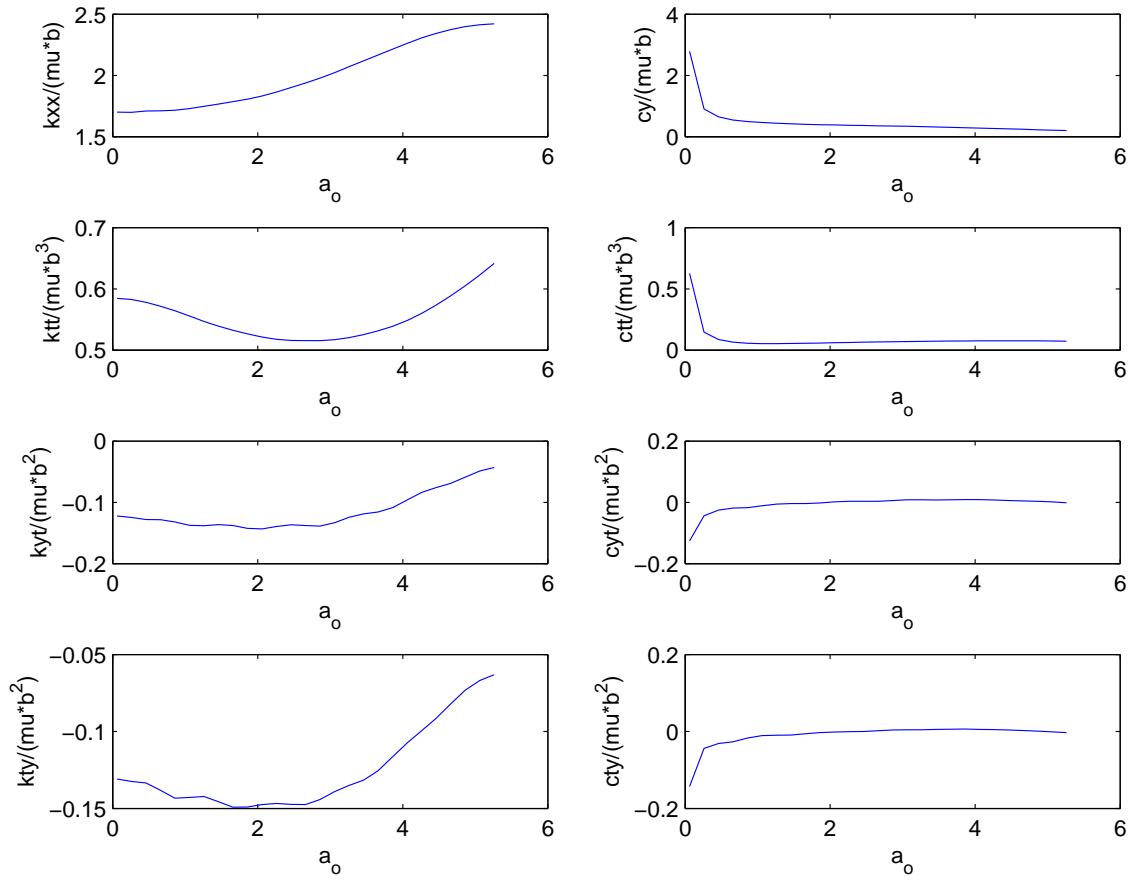


Figura 4.6: Impedancias de un grupo de 2×2 pilotes en suelo rígido ($E_p/E_s = 10^2$). $s/d = 10$

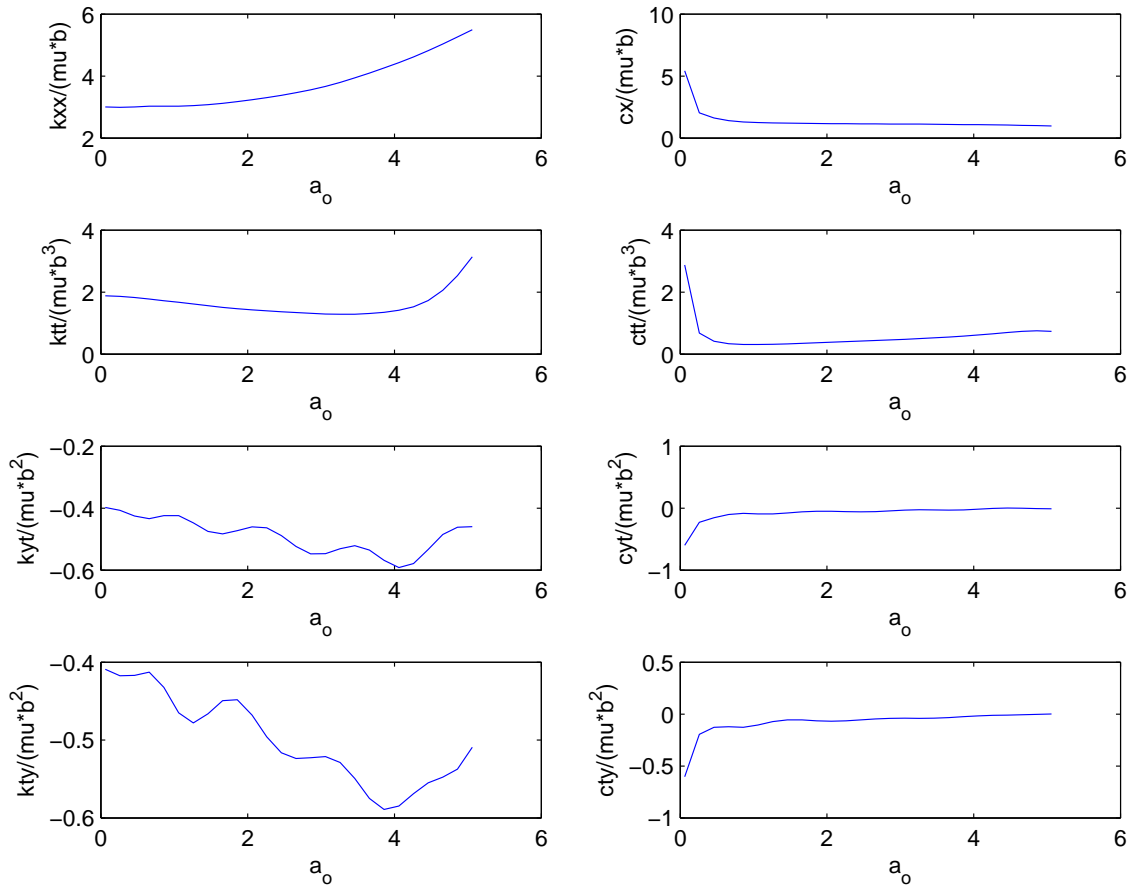


Figura 4.7: Impedancias de un grupo de 3×3 pilotes en suelo flexible ($E_p/E_s = 10^3$). $s/d = 10$

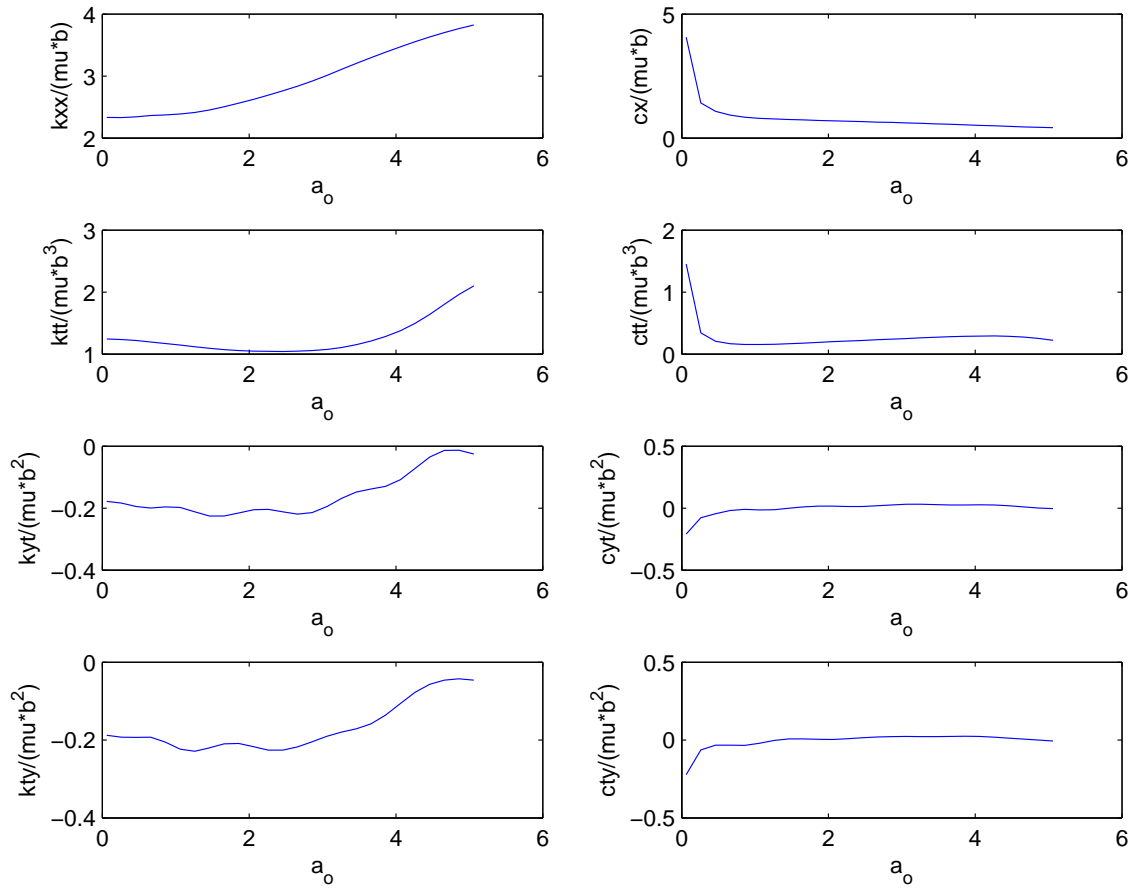


Figura 4.8: Impedancias de un grupo de 3×3 pilotes en suelo rígido ($E_p/E_s = 10^2$). $s/d = 10$

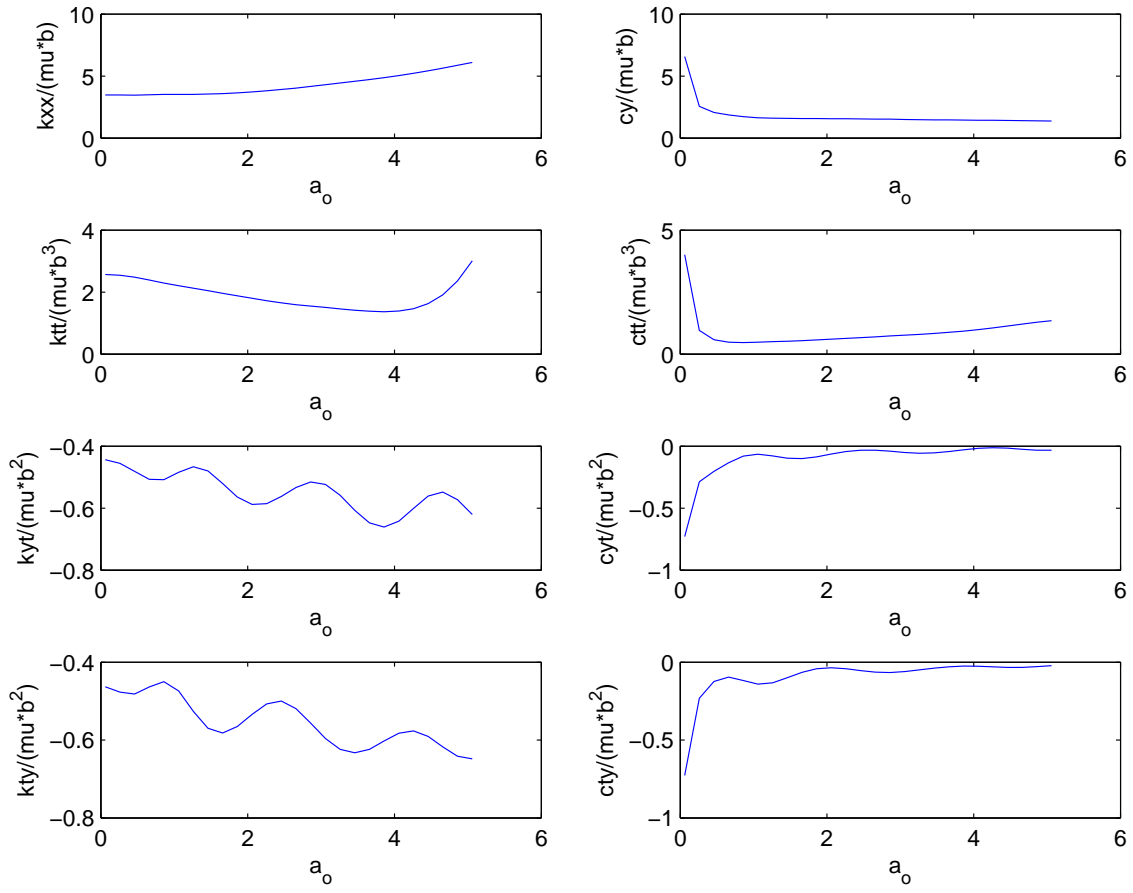


Figura 4.9: Impedancias de un grupo de 4×4 pilotes en suelo flexible ($E_p/E_s = 10^3$). $s/d = 10$

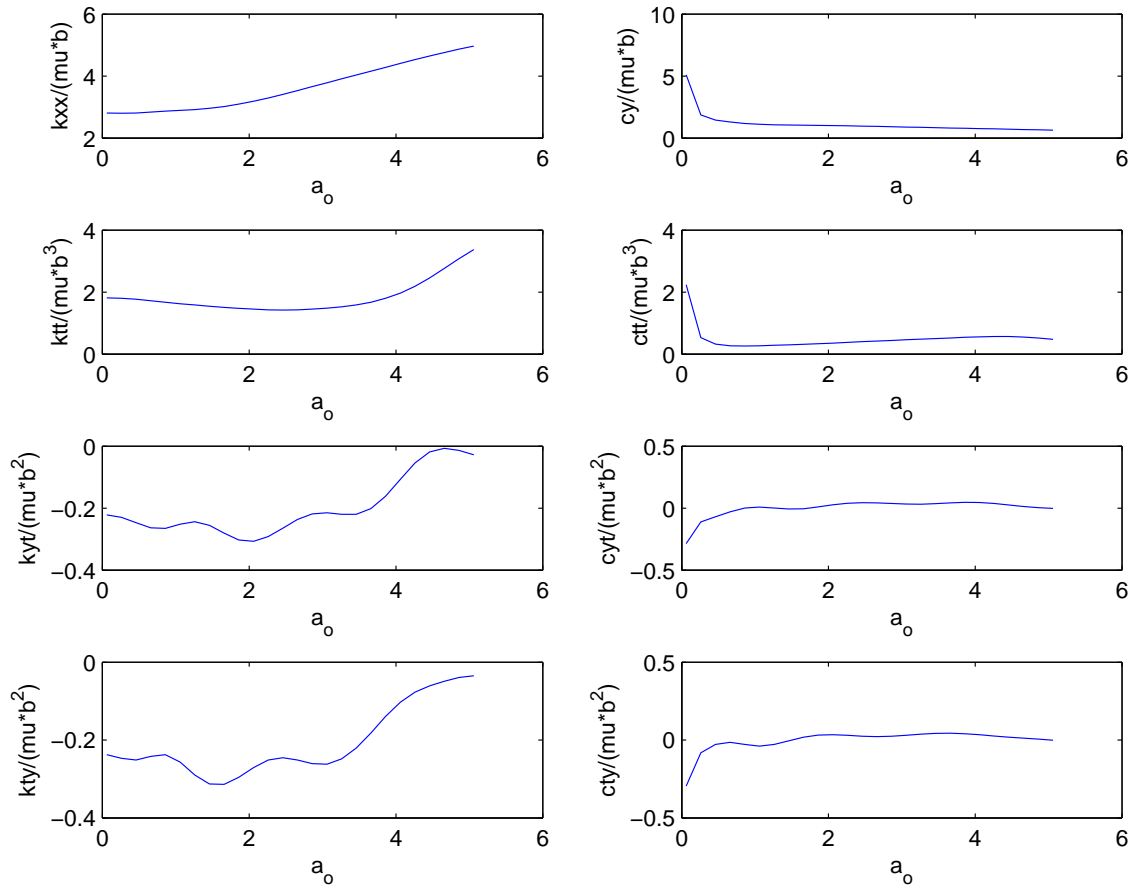


Figura 4.10: Impedancias de un grupo de 4×4 pilotes en suelo rígido ($E_p/E_s = 10^2$). $s/d = 10$

4.3. Parámetros adimensionales del problema

La respuesta del sistema cimiento-estructura depende de las propiedades del cimiento y del suelo, las propiedades de la estructura y de las características de la excitación. Los efectos de estos factores pueden expresarse en términos de parámetros adimensionales [3].

1. Parámetro de onda (wave parameter), que mide la rigidez relativa suelo-estructura.

$$\sigma = \frac{C_s}{f \cdot h} = 3, 5, \infty \quad (4.9)$$

donde:

C_s es la velocidad propagación de la onda S en el suelo.

$$C_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (4.10)$$

f es frecuencia natural en Hz de la estructura sobre base rígida.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{p}{2\pi} \quad (4.11)$$

donde p es la frecuencia natural en rad/s de la estructura sobre base rígida.

2. Ratio de esbeltez (slenderness ratio) $h/b = 1, 2, 5$ mide la relación entre la altura de la estructura y el semiancho del cimiento.
3. Densidad de masa relativa entre la estructura y el suelo.

$$\delta = \frac{m}{4\rho b^2 h} = 0,15 \quad (4.12)$$

donde:

ρ es la densidad del suelo.

4. Ratio de masa cimiento-estructura $\frac{m_o}{m} = 0$.
5. Coeficiente de amortiguamiento de la estructura en base rígida $\xi = 0,02$.
6. Coeficiente de Poisson del suelo $\nu = 0,4$.
7. Frecuencia de excitación ω .

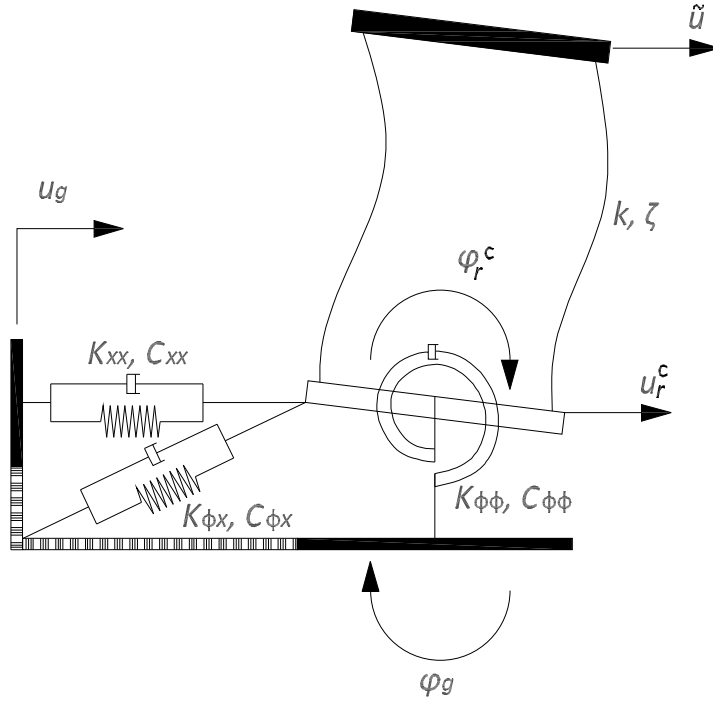


Figura 4.11: Modelo de subestructuración de una estructura de una planta

4.4. Modelo de subestructuración

Considerando amortiguamiento viscoso para el material de la estructura se obtiene

$$K = k + i\omega C = k + 2mp\xi\omega i \quad (4.13)$$

Por otra parte, las expresiones de las impedancias del suelo son

$$\hat{K}_{xx} = k_{xx}^e \cdot (k_{xx} + ia_o C_{xx}) = K_{xx} + ia_o C_{xx} \quad (4.14)$$

$$\hat{K}_{\theta\theta} = k_{\theta\theta}^e \cdot (k_{\theta\theta} + ia_o C_{\theta\theta}) = K_{\theta\theta} + ia_o C_{\theta\theta} \quad (4.15)$$

$$\hat{K}_{x\theta} = \hat{K}_{\theta x} = -k_{xx}^e \cdot (k_{x\theta} + ia_o C_{x\theta}) = K_{x\theta} + ia_o C_{x\theta} \quad (4.16)$$

donde las impedancias estáticas, k_{xx}^e y $k_{\theta\theta}^e$, tienen las siguientes expresiones

$$k_{xx}^e = \frac{8\mu b}{2 - \nu} \quad (4.17)$$

$$k_{\theta\theta}^e = \frac{8\mu b^3}{3(1 - \nu)} \quad (4.18)$$

y la frecuencia adimensional se expresa como

$$a_o = \frac{\omega b}{C_s} = \frac{2\pi}{\sigma} \frac{\omega}{p} \frac{b}{h} \quad (4.19)$$

Introduciendo las expresiones de la rigidez de la estructura y de las impedancias del suelo en la ecuación (2.14) se obtiene

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ -k & K_{xx} & K_{x\theta} \\ 0 & K_{\theta x} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ u_r^c \\ \varphi_r^c \end{bmatrix} + ia_o \begin{bmatrix} \frac{2mp\xi\omega}{a_o} & 0 & 0 \\ \frac{-2mp\xi\omega}{a_o} & C_{xx} & C_{x\theta} \\ 0 & C_{\theta x} & C_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ u_r^c \\ \varphi_r^c \end{bmatrix} - \\ \omega^2 \begin{bmatrix} m & m & mh \\ 0 & m_o & 0 \\ mh & mh & mh^2 + I_o + I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ u_r^c \\ \varphi_r^c \end{bmatrix} = \\ \omega^2 \begin{bmatrix} m \\ m_o \\ mh \end{bmatrix} u_g + \omega^2 \begin{bmatrix} mh \\ 0 \\ mh^2 + I_o + I \end{bmatrix} \varphi_g \quad (4.20) \end{aligned}$$

Sumando las ecuaciones primera y segunda del sistema matricial, la segunda ecuación representará el equilibrio horizontal del conjunto, así

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & K_{xx} & K_{x\theta} \\ 0 & K_{\theta x} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ u_r^c \\ \varphi_r^c \end{bmatrix} + ia_o \begin{bmatrix} \frac{2mp\xi\omega}{a_o} & 0 & 0 \\ 0 & C_{xx} & C_{x\theta} \\ 0 & C_{\theta x} & C_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ u_r^c \\ \varphi_r^c \end{bmatrix} - \\
& \omega^2 \begin{bmatrix} m & m & mh \\ m & m + m_o & mh \\ mh & mh & mh^2 + I_o + I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ u_r^c \\ \varphi_r^c \end{bmatrix} = \\
& \omega^2 \begin{bmatrix} m \\ m + m_o \\ mh \end{bmatrix} u_g + \omega^2 \begin{bmatrix} mh \\ mh \\ mh^2 + I_o + I \end{bmatrix} \varphi_g \quad (4.21)
\end{aligned}$$

Considerando la siguiente expresión para la rigidez de la estructura sin amortiguamiento

$$k = p^2 \cdot m \quad (4.22)$$

la ecuación matricial queda

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} p^2m & 0 & 0 \\ 0 & K_{xx} & K_{x\theta} \\ 0 & K_{\theta x} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ u_r^c \\ \varphi_r^c \end{bmatrix} + ia_o \begin{bmatrix} \frac{2mp\xi\omega}{a_o} & 0 & 0 \\ 0 & C_{xx} & C_{x\theta} \\ 0 & C_{\theta x} & C_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ u_r^c \\ \varphi_r^c \end{bmatrix} - \\
& \omega^2 \begin{bmatrix} m & m & mh \\ m & m + m_o & mh \\ mh & mh & mh^2 + I_o + I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ u_r^c \\ \varphi_r^c \end{bmatrix} = \\
& \omega^2 \begin{bmatrix} m \\ m + m_o \\ mh \end{bmatrix} u_g + \omega^2 \begin{bmatrix} mh \\ mh \\ mh^2 + I_o + I \end{bmatrix} \varphi_g \quad (4.23)
\end{aligned}$$

Sacando como factor común la masa de la estructura m a ambos lados de la igualdad y sumando las matrices del primer término de la igualdad, se obtiene

$$m \begin{bmatrix} p^2 + 2p\omega\xi i - \omega^2 & -\omega^2 & -\omega^2 h \\ -\omega^2 & \frac{\hat{K}_{xx}}{m} - \omega^2 - \omega^2 \frac{m_o}{m} & \frac{\hat{K}_{x\theta}}{m} - \omega^2 h \\ -\omega^2 h & \frac{\hat{K}_{\theta x}}{m} - \omega^2 h & \frac{\hat{K}_{\theta\theta}}{m} - \omega^2 h^2 - \omega^2 \frac{I_o + I}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ u_r^c \\ \varphi_r^c \end{bmatrix} = -m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \frac{m_o}{m} \\ h \end{bmatrix} \ddot{u}_g - m \begin{bmatrix} h \\ h \\ h^2 + \frac{I_o + I}{m} \end{bmatrix} \ddot{\varphi}_g \quad (4.24)$$

Sacando como factor común ω^2/p^2 del primer término de la igualdad se llega a la siguiente expresión

$$\frac{\omega^2}{p^2} \begin{bmatrix} \frac{p^2}{\omega^2} + 2\frac{p}{\omega}\xi i - 1 & -1 & -h \\ -1 & \frac{1}{m\omega^2} \hat{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} & \frac{1}{m\omega^2} \hat{K}_{x\theta} - h \\ -h & \frac{1}{m\omega^2} \hat{K}_{\theta x} - h & \frac{1}{m\omega^2} \hat{K}_{\theta\theta} - h^2 - \frac{I_o + I}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^2 \tilde{u} \\ p^2 u_r^c \\ p^2 \varphi_r^c \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \frac{m_o}{m} \\ h \end{bmatrix} \ddot{u}_g - \begin{bmatrix} h \\ h \\ h^2 + \frac{I_o + I}{m} \end{bmatrix} \ddot{\varphi}_g \quad (4.25)$$

Dividiendo entre h la última fila de la ecuación y la última columna de la matriz del sistema, la expresión queda

$$\frac{\omega^2}{p^2} \begin{bmatrix} \frac{p^2}{\omega^2} + 2\frac{p}{\omega}\xi i - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{m\omega^2} \hat{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} & \frac{1}{m\omega^2 h} \hat{K}_{x\theta} - 1 \\ -1 & \frac{1}{m\omega^2 h} \hat{K}_{\theta x} - 1 & \frac{1}{m\omega^2 h^2} \hat{K}_{\theta\theta} - 1^2 - \frac{I_o + I}{mh^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^2 \tilde{u} \\ p^2 u_r^c \\ p^2 h \varphi_r^c \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \frac{m_o}{m} \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{u}_g - \begin{bmatrix} h \\ h \\ h + \frac{I_o + I}{mh} \end{bmatrix} \ddot{\varphi}_g \quad (4.26)$$

La inercia a giro de la cimentación se expresa como

$$I_o = \frac{m_o b^2}{3} \quad (4.27)$$

Por otra parte, la inercia a giro de la estructura tiene la siguiente expresión

$$I = \frac{m b^2}{3} \quad (4.28)$$

Sustituyendo las expresiones (4.27) y (4.28) en el sistema de ecuaciones (4.26) queda

$$\frac{\omega^2}{p^2} \begin{bmatrix} \frac{p^2}{\omega^2} + 2\frac{p}{\omega}\xi i - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{m\omega^2}\hat{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} & \frac{1}{m\omega^2 h}\hat{K}_{x\theta} - 1 \\ -1 & \frac{1}{m\omega^2 h}\hat{K}_{\theta x} - 1 & \frac{1}{m\omega^2 h^2}\hat{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{b^2}{3h^2}\left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^2 \tilde{u} \\ p^2 u_r^c \\ p^2 h \varphi_r^c \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \frac{m_o}{m} \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{u}_g - h \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 + \frac{b^2}{3h^2}\left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{bmatrix} \ddot{\varphi}_g \quad (4.29)$$

A continuación se adimensionalizan los términos de la matriz del sistema (ec.4.29) donde aparecen las expresiones de las impedancias, así el término (2,2) queda

$$\frac{1}{m\omega^2}\hat{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} \quad (4.30)$$

si

$$\tilde{K}_{xx} = \frac{\hat{K}_{xx}}{\mu b} = \frac{8}{2 - \nu}(k_{xx} + i a_o c_{xx}) \quad (4.31)$$

sustituyendo en la ecuación (4.30):

$$\frac{1}{m\omega^2} \frac{8\mu b}{2 - \nu} (k_{xx} + i a_o c_{xx}) - 1 - \frac{m_o}{m} = \frac{1}{m\omega^2} \mu b \left[\frac{8}{2 - \nu} (k_{xx} + i a_o c_{xx}) \right] - 1 - \frac{m_o}{m} = \frac{1}{m\omega^2} \mu b \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} \quad (4.32)$$

Procediendo de forma análoga con el término (3,3) de la matriz del sistema (ec.4.29) se tiene

$$\frac{1}{m\omega^2 h^2} \hat{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{b^2}{3h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \quad (4.33)$$

si:

$$\tilde{K}_{\theta\theta} = \frac{\hat{K}_{\theta\theta}}{\mu b^3} = \frac{8}{3(1-\nu)} (k_{\theta\theta} + i a_o c_{\theta\theta}) \quad (4.34)$$

Sustituyendo en la ecuación (4.33) queda

$$\begin{aligned} \frac{1}{m\omega^2 h^2} \mu b^3 \left[\frac{8}{3(1-\nu)} (k_{\theta\theta} + i a_o c_{\theta\theta}) \right] - 1 - \frac{b^2}{3h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) = \\ \frac{1}{m\omega^2 h^2} \mu b^3 \cdot \tilde{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{b^2}{3h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Sustituyendo la expresión de la velocidad de propagación en el suelo C_s (ec.4.10) en las ecuaciones (4.32) y (4.35), respectivamente, se obtiene:

$$\frac{1}{m\omega^2} \mu b \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} = \frac{1}{m\omega^2} C_s^2 \rho b \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{m\omega^2 h^2} \mu b^3 \cdot \tilde{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{b^2}{3h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) = \\ \frac{1}{m\omega^2 h^2} C_s^2 \rho b^3 \cdot \tilde{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{b^2}{3h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Despejando ρ de la ecuación (4.12) se obtiene:

$$\rho = \frac{m}{4\delta b^2 h} \quad (4.38)$$

Sustituyendo esta expresión en las ecuaciones (4.36) y (4.37) se obtiene

$$\frac{1}{m\omega^2}C_s^2\rho b \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} = \frac{1}{m\omega^2}C_s^2\frac{m}{4\delta b^2h}b \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{m\omega^2h^2}C_s^2\rho b^3 \cdot \tilde{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{b^2}{3h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) = \\ \frac{1}{m\omega^2h^2}C_s^2\frac{m}{4\delta b^2h}b^3 \cdot \tilde{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{b^2}{3h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Despejando C_s de la ecuación (4.9) y sustituyendo f por su expresión (ec. 4.11) se obtiene

$$C_s = \sigma \frac{p}{2\pi} h \quad (4.41)$$

Sustituyendo esta expresión en las ecuaciones (4.39) y (4.40) queda

$$\begin{aligned} \frac{1}{m\omega^2}C_s^2\frac{m}{4\delta b^2h}b \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} = \frac{1}{m\omega^2}\sigma^2\frac{p^2}{4\pi^2}h^2\frac{m}{4\delta b^2h}b \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} = \\ \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2\frac{1}{16\pi^2}\frac{h}{b}\frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{m\omega^2h^2}C_s^2\frac{m}{4\delta b^2h}b^3 \cdot \tilde{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{b^2}{3h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) = \\ \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2\frac{1}{16\pi^2}\frac{b}{h}\frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{b^2}{3h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas, (ec.4.42) y (ec.4.43), en la ecuación del sistema (4.29) en los términos (2,2) y (3,3) respectivamente, la ecuación matricial queda:

$$\frac{\omega^2}{p^2} \begin{bmatrix} \frac{p^2}{\omega^2} + 2\frac{p}{\omega}\xi i - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{16\pi^2} \frac{h}{b} \frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} & \frac{1}{m\omega^2 h} \tilde{K}_{x\theta} - 1 \\ -1 & \frac{1}{m\omega^2 h} \tilde{K}_{\theta x} - 1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{16\pi^2} \frac{b}{h} \frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{b^2}{3h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p^2 \tilde{u} \\ p^2 u_r^c \\ p^2 h \varphi_r^c \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \frac{m_o}{m} \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{u}_g - h \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 + \frac{b^2}{3h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{bmatrix} \ddot{\varphi}_g \quad (4.44)$$

Analizando los términos de la matriz donde aparecen las impedancias cruzadas se obtiene:

$$\frac{1}{m\omega^2 h} (K_{x\theta} + i a_o C_{x\theta}) - 1 = \frac{1}{m\omega^2 h} \mu b^2 \tilde{K}_{x\theta} - 1 = \frac{p^2}{\omega^2} \sigma^2 \frac{1}{\delta} \frac{1}{16\pi^2} \tilde{K}_{x\theta} - 1 \quad (4.45)$$

$$\frac{1}{m\omega^2 h} (K_{\theta x} + i a_o C_{\theta x}) - 1 = \frac{1}{m\omega^2 h} \mu b^2 \tilde{K}_{\theta x} - 1 = \frac{p^2}{\omega^2} \sigma^2 \frac{1}{\delta} \frac{1}{16\pi^2} \tilde{K}_{\theta x} - 1 \quad (4.46)$$

Sustituyendo las expresiones (4.45) y (4.46) en la ecuación (4.44):

$$\frac{\omega^2}{p^2} \begin{bmatrix} \frac{p^2}{\omega^2} + 2\frac{p}{\omega}\xi i - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{16\pi^2} \frac{h}{b} \frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{\delta} \frac{1}{16\pi^2} \tilde{K}_{x\theta} - 1 \\ -1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{\delta} \frac{1}{16\pi^2} \tilde{K}_{\theta x} - 1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{16\pi^2} \frac{b}{h} \frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{b^2}{3h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p^2 \tilde{u} \\ p^2 u_r^c \\ p^2 h \varphi_r^c \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \frac{m_o}{m} \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{u}_g - h \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 + \frac{b^2}{3h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{bmatrix} \ddot{\varphi}_g \quad (4.47)$$

Lo que es igual que

$$\frac{\omega^2}{p^2} \begin{bmatrix} \frac{p^2}{\omega^2} + 2\frac{p}{\omega}\xi i - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{16\pi^2} \frac{h}{b} \frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{\delta} \frac{1}{16\pi^2} \tilde{K}_{x\theta} - 1 \\ -1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{\delta} \frac{1}{16\pi^2} \tilde{K}_{\theta x} - 1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{16\pi^2} \frac{b}{h} \frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{b^2}{3h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p^2 \tilde{u} \\ p^2 u_r^c \\ p^2 h \varphi_r^c \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \frac{m_o}{m} \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{u}_g - \frac{h}{b} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 + \frac{b^2}{3h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{bmatrix} (\ddot{\varphi}b)_g \quad (4.48)$$

En el caso de que el amortiguamiento del material de la estructura fuese de tipo histerético,

$$K = k(1 + 2\xi i) \quad (4.49)$$

y el sistema de ecuaciones del problema quedaría

$$\frac{\omega^2}{p^2} \begin{bmatrix} \frac{p^2}{\omega^2}(1 + 2\xi i) - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{16\pi^2} \frac{h}{b} \frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{xx} - 1 - \frac{m_o}{m} & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{\delta} \frac{1}{16\pi^2} \tilde{K}_{x\theta} - 1 \\ -1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{\delta} \frac{1}{16\pi^2} \tilde{K}_{\theta x} - 1 & \frac{p^2}{\omega^2}\sigma^2 \frac{1}{16\pi^2} \frac{b}{h} \frac{1}{\delta} \cdot \tilde{K}_{\theta\theta} - 1 - \frac{b^2}{3h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p^2 \tilde{u} \\ p^2 u_r^c \\ p^2 h \varphi_r^c \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \frac{m_o}{m} \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{u}_g - \frac{h}{b} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 + \frac{b^2}{3h^2} \left(1 + \frac{m_o}{m}\right) \end{bmatrix} (\ddot{\varphi}b)_g \quad (4.50)$$

4.5. Espectros de respuesta del sistema

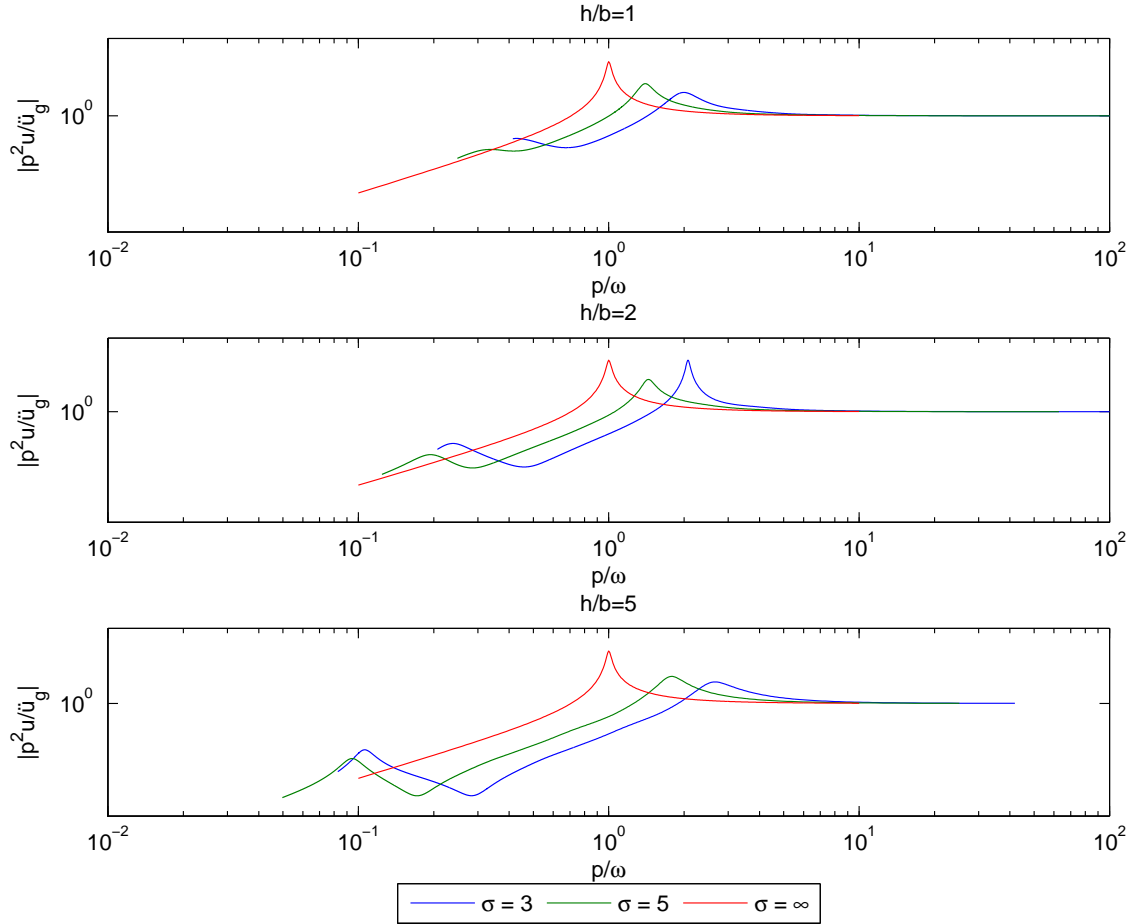


Figura 4.12: Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 2×2 pilotes. $E_p/E_s = 10^3$, $s/d = 5$, $h/b = 1, 2, 5$

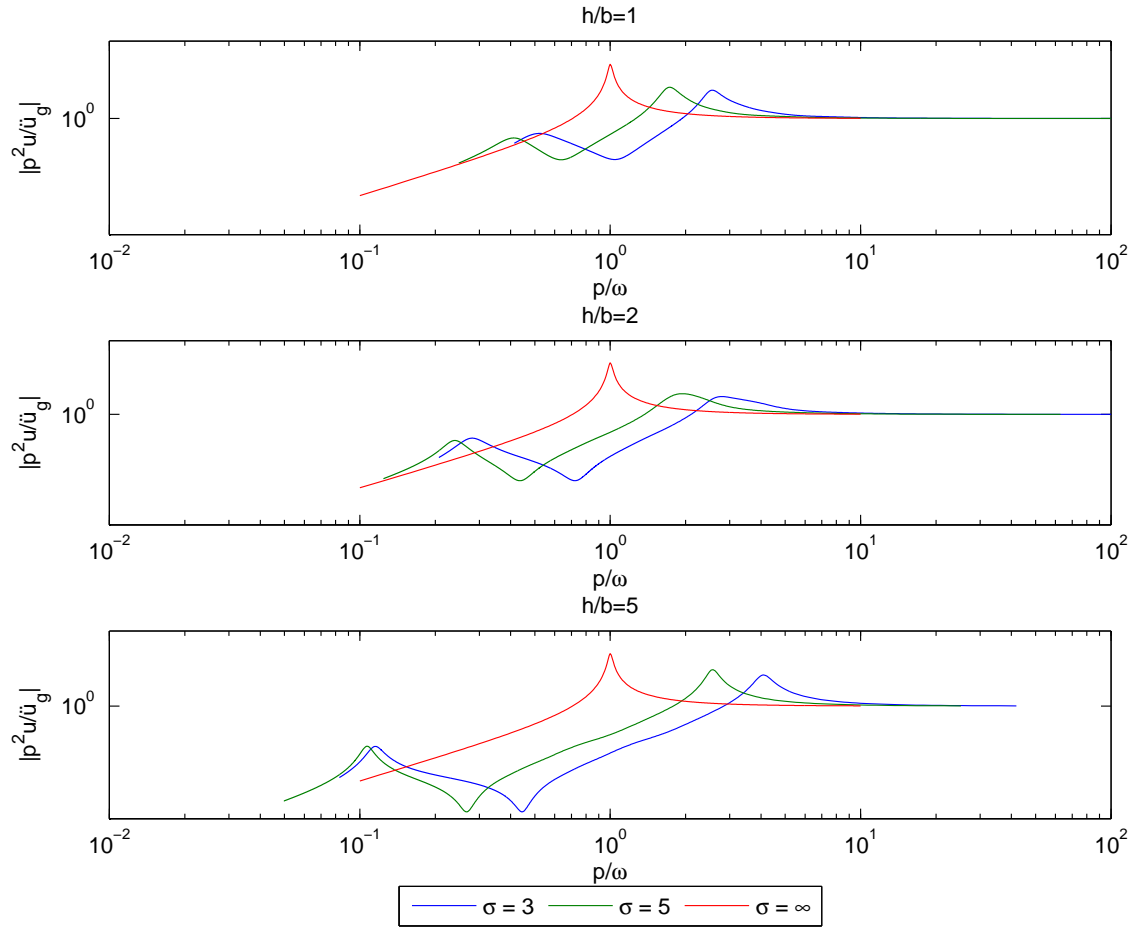


Figura 4.13: Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 2×2 pilotes. $Ep/Es = 10^3$, $s/d = 10$, $h/b = 1, 2, 5$

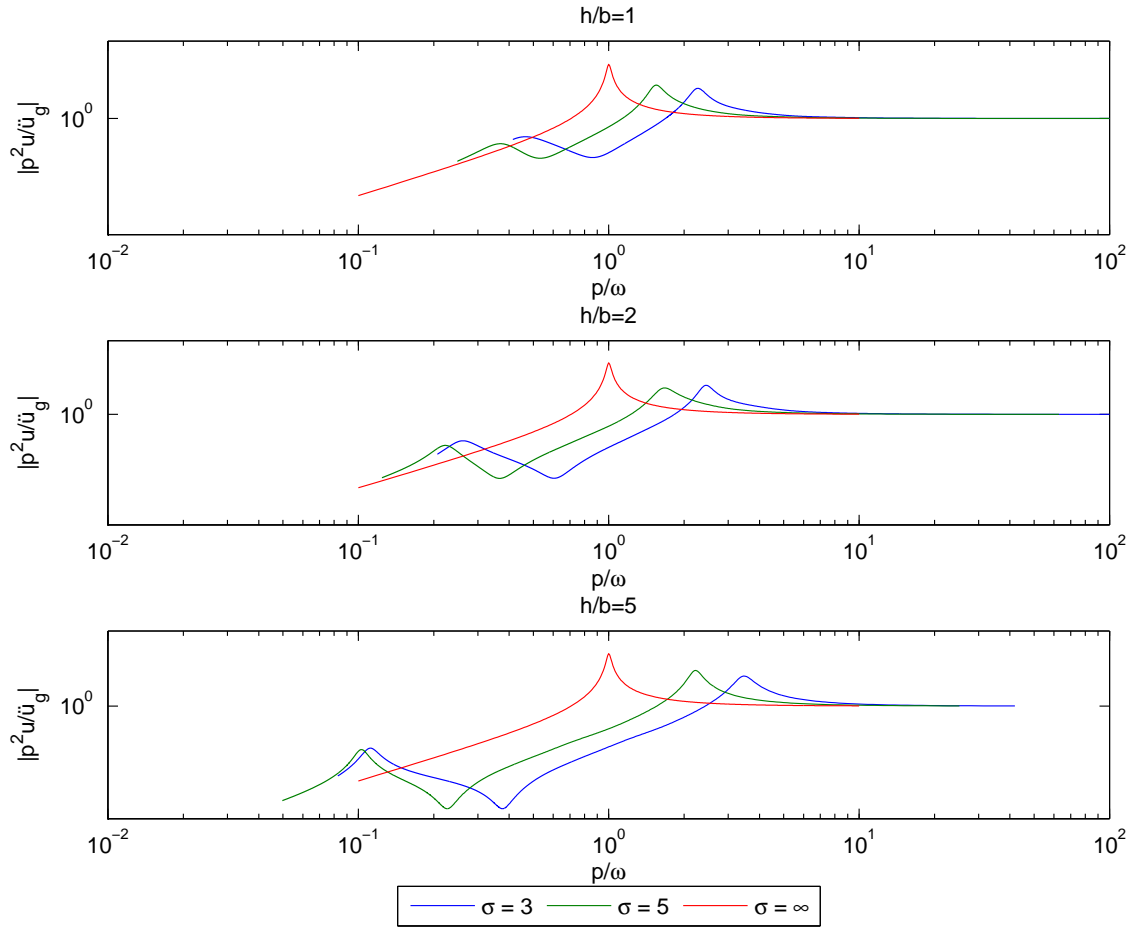


Figura 4.14: Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 2×2 pilotes. $E_p/E_s = 10^2$, $s/d = 5$, $h/b = 1, 2, 5$

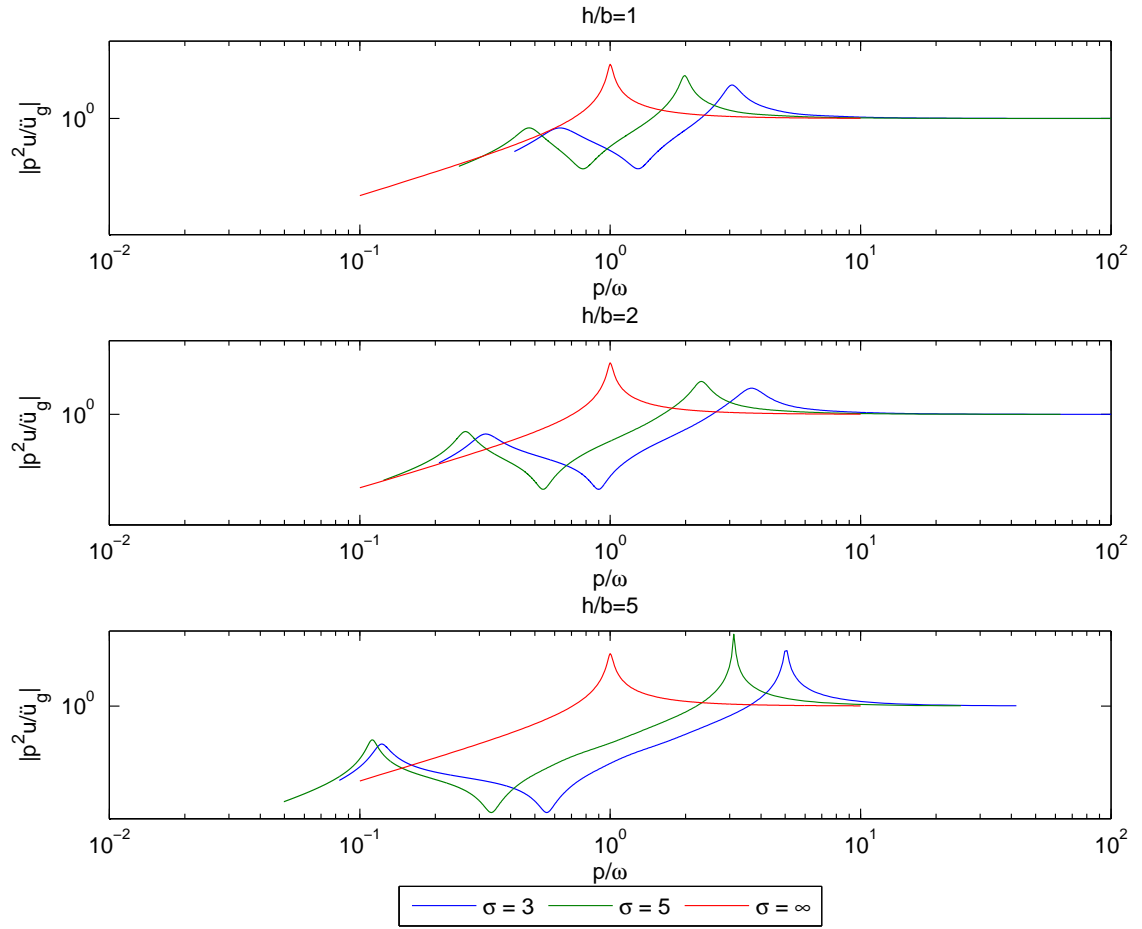


Figura 4.15: Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 2×2 pilotes. $Ep/Es = 10^2$, $s/d = 10$, $h/b = 1, 2, 5$

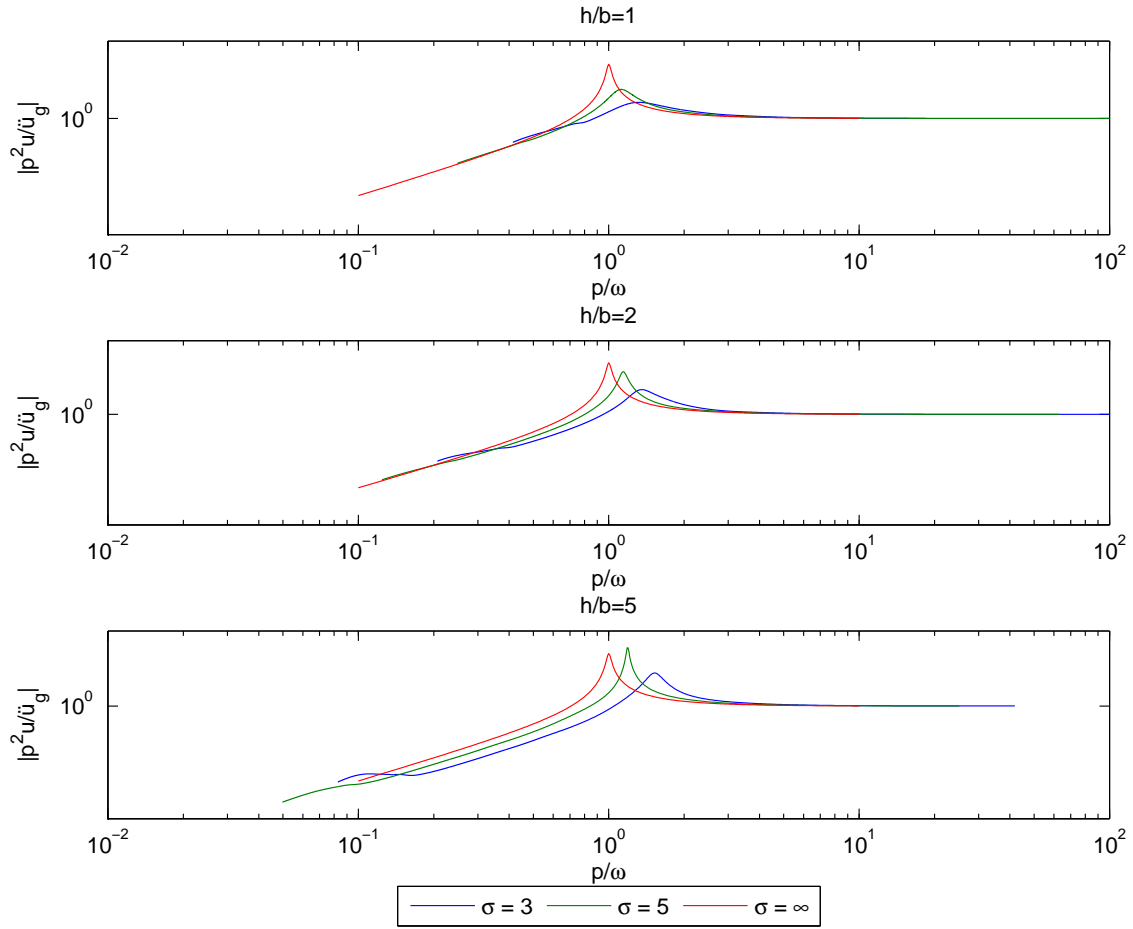


Figura 4.16: Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 3×3 pilotes. $E_p/E_s = 10^3$, $s/d = 2$, $h/b = 1, 2, 5$

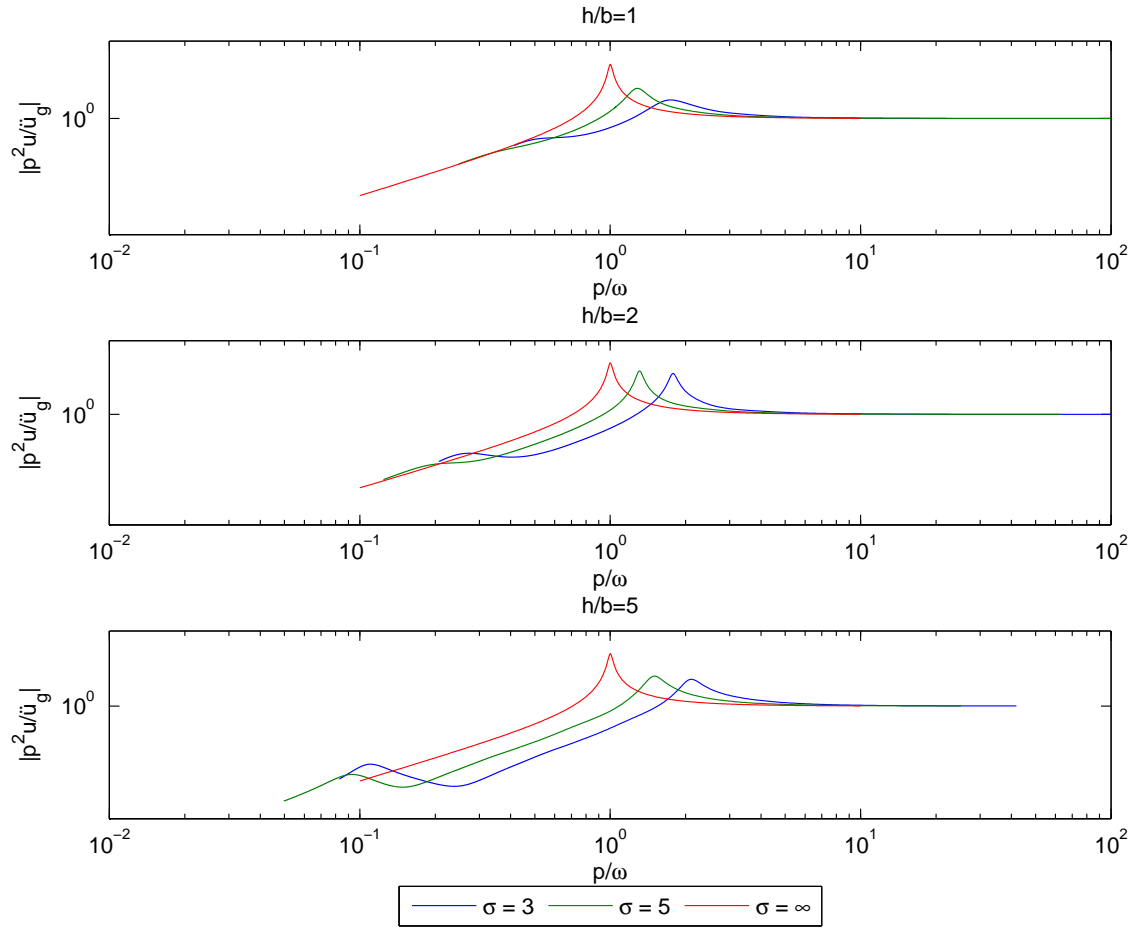


Figura 4.17: Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 3×3 pilotes. $Ep/Es = 10^3$, $s/d = 5$, $h/b = 1, 2, 5$

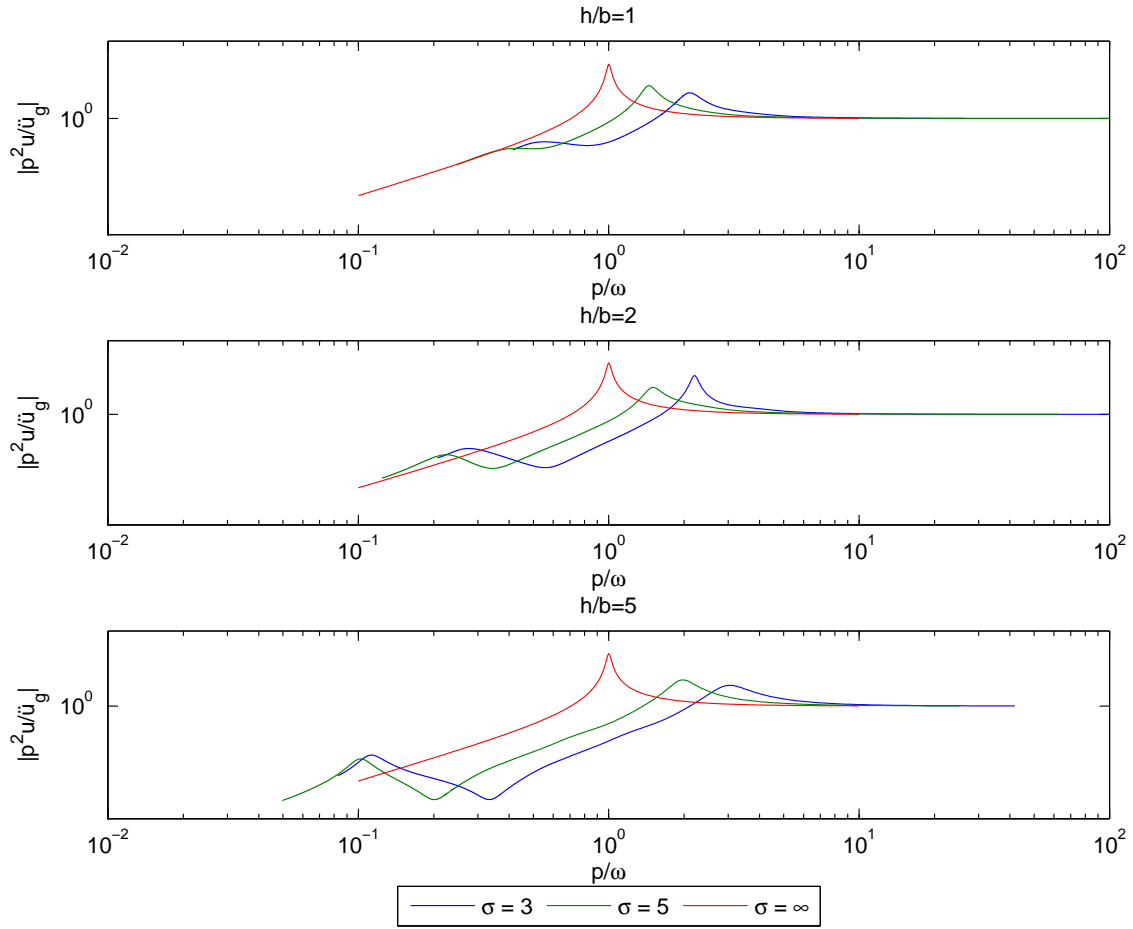


Figura 4.18: Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 3×3 pilotes. $E_p/E_s = 10^3$, $s/d = 10$, $h/b = 1, 2, 5$

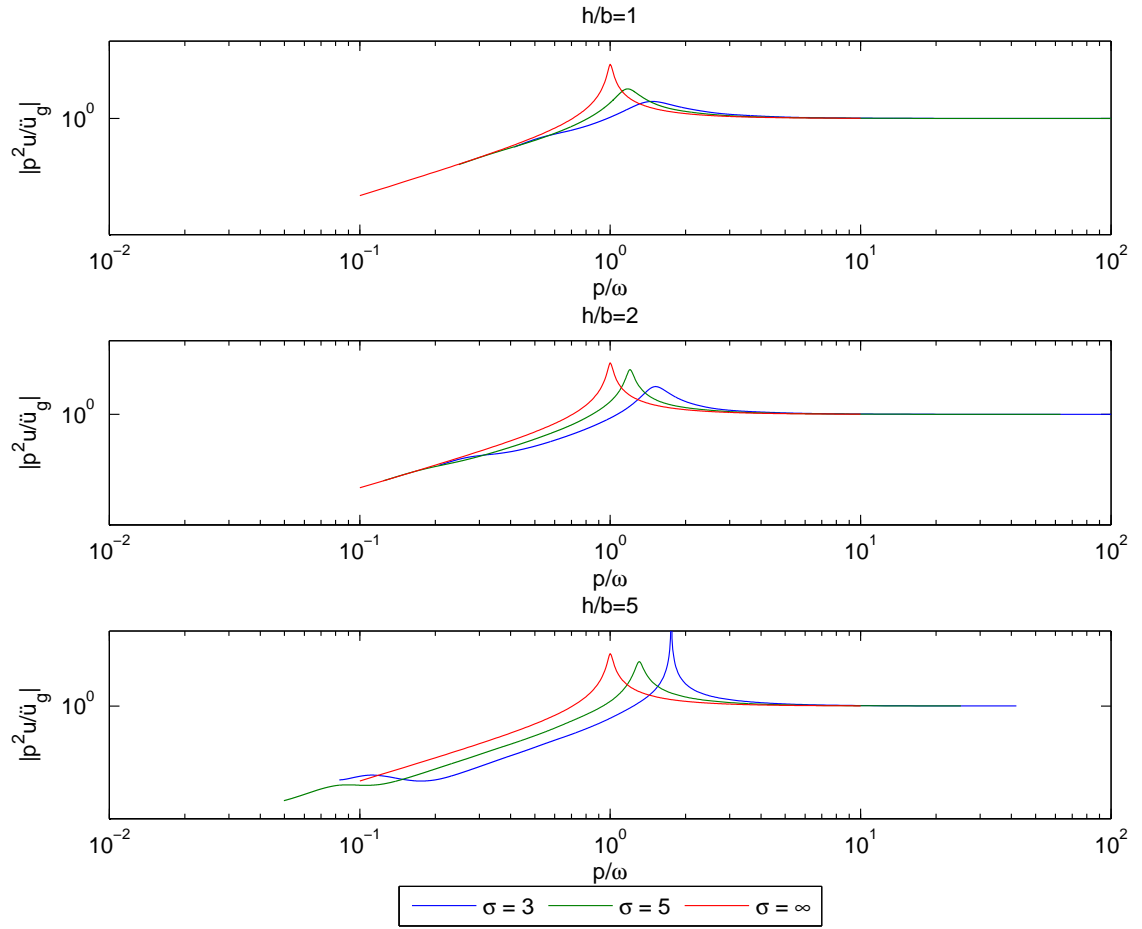


Figura 4.19: Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 3×3 pilotes. $Ep/Es = 10^2$, $s/d = 2$, $h/b = 1, 2, 5$

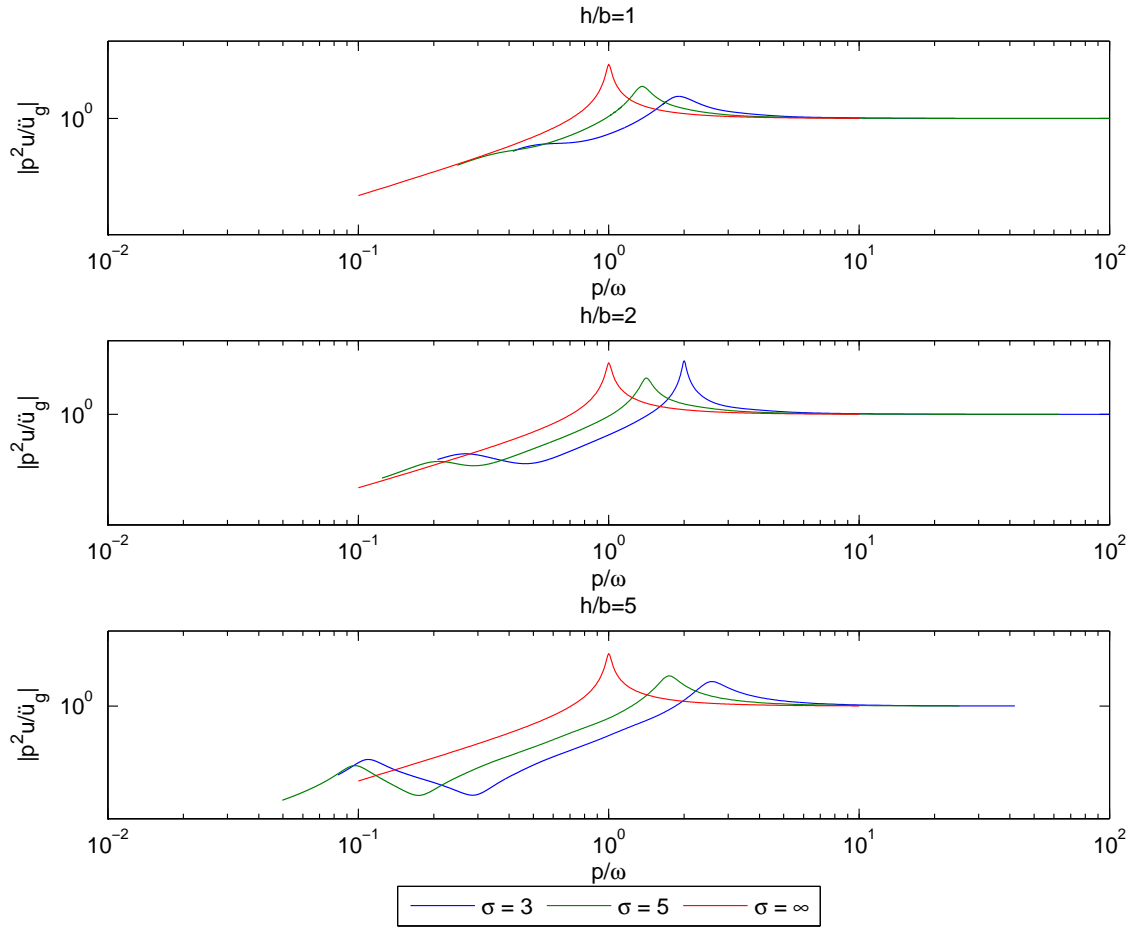


Figura 4.20: Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 3×3 pilotes. $E_p/E_s = 10^2$, $s/d = 5$, $h/b = 1, 2, 5$

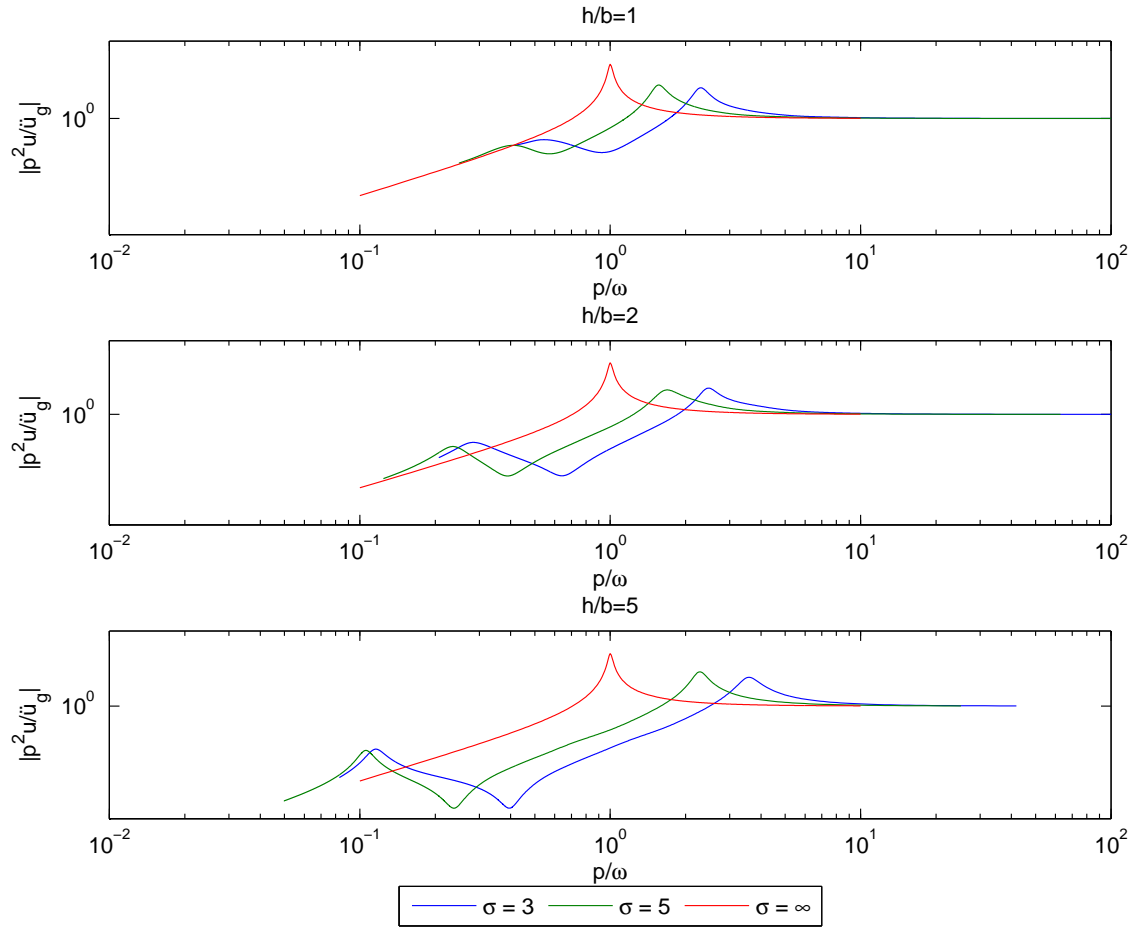


Figura 4.21: Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 3×3 pilotes. $Ep/Es = 10^2$, $s/d = 10$, $h/b = 1, 2, 5$

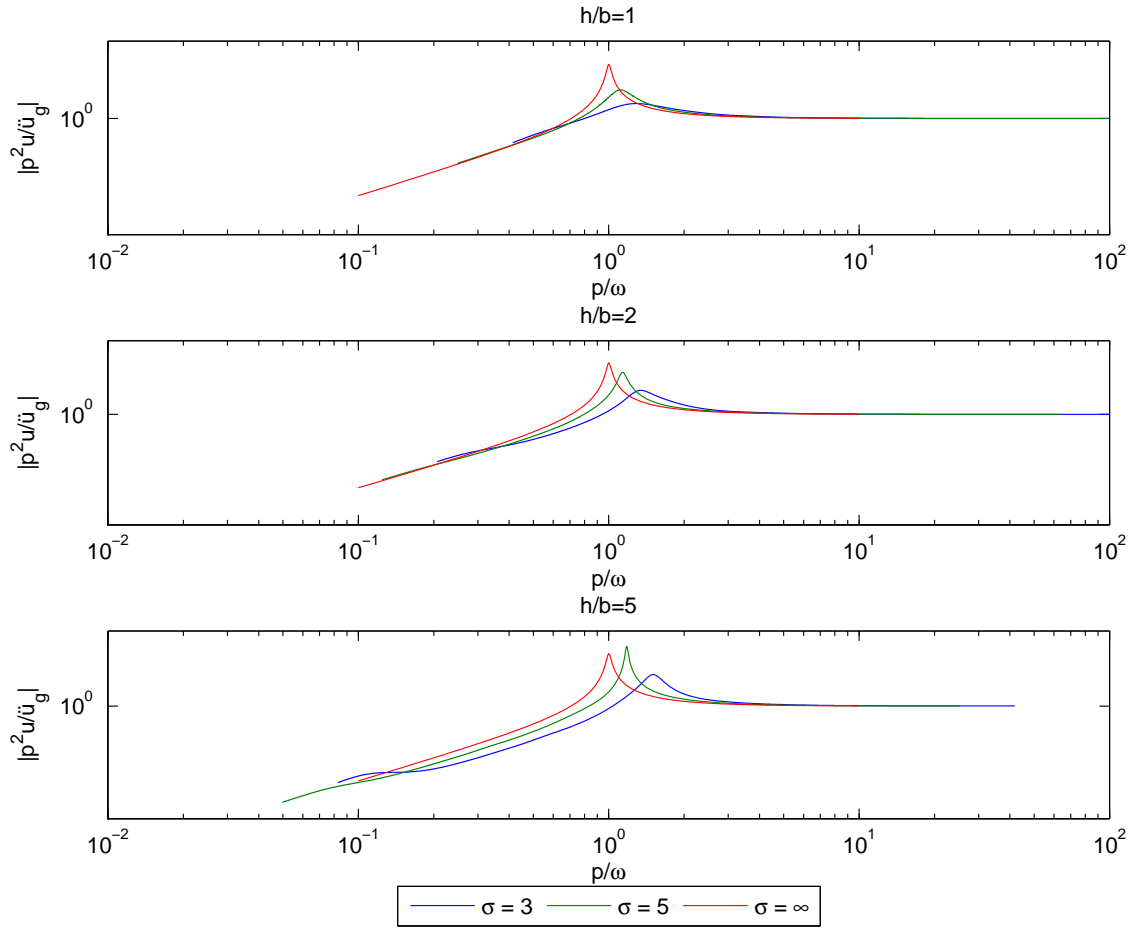


Figura 4.22: Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 4×4 pilotes. $E_p/E_s = 10^3$, $s/d = 2$, $h/b = 1, 2, 5$

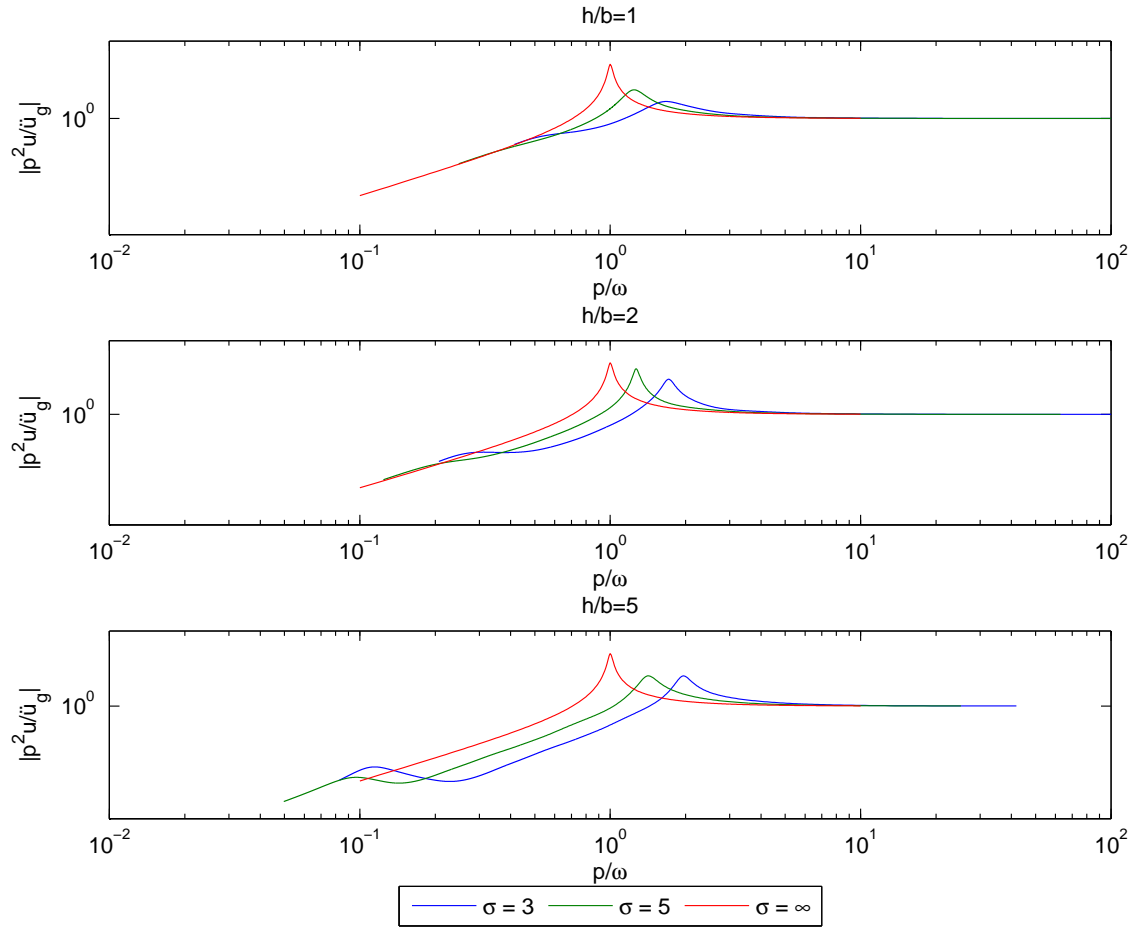


Figura 4.23: Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 4×4 pilotes. $Ep/Es = 10^3$, $s/d = 5$, $h/b = 1, 2, 5$

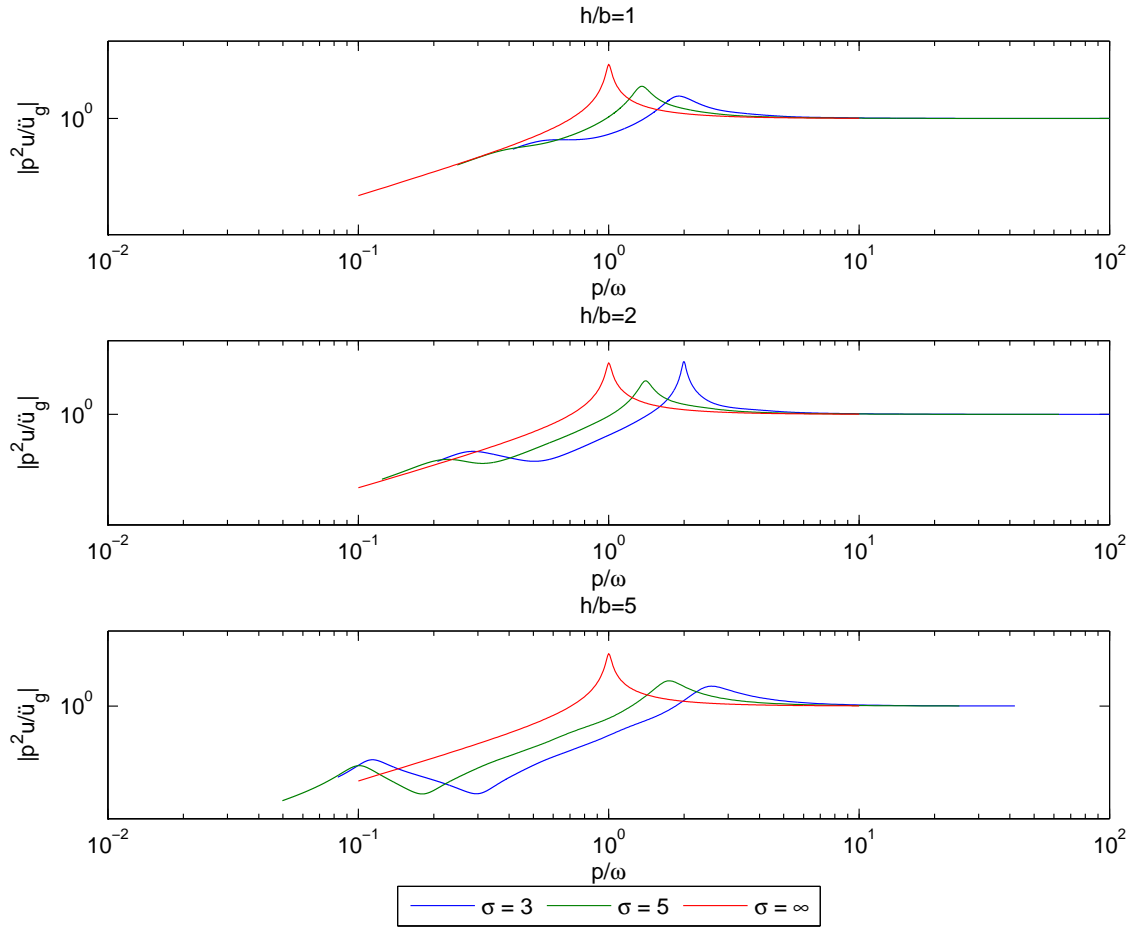


Figura 4.24: Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 4×4 pilotes. $E_p/E_s = 10^3$, $s/d = 10$, $h/b = 1, 2, 5$

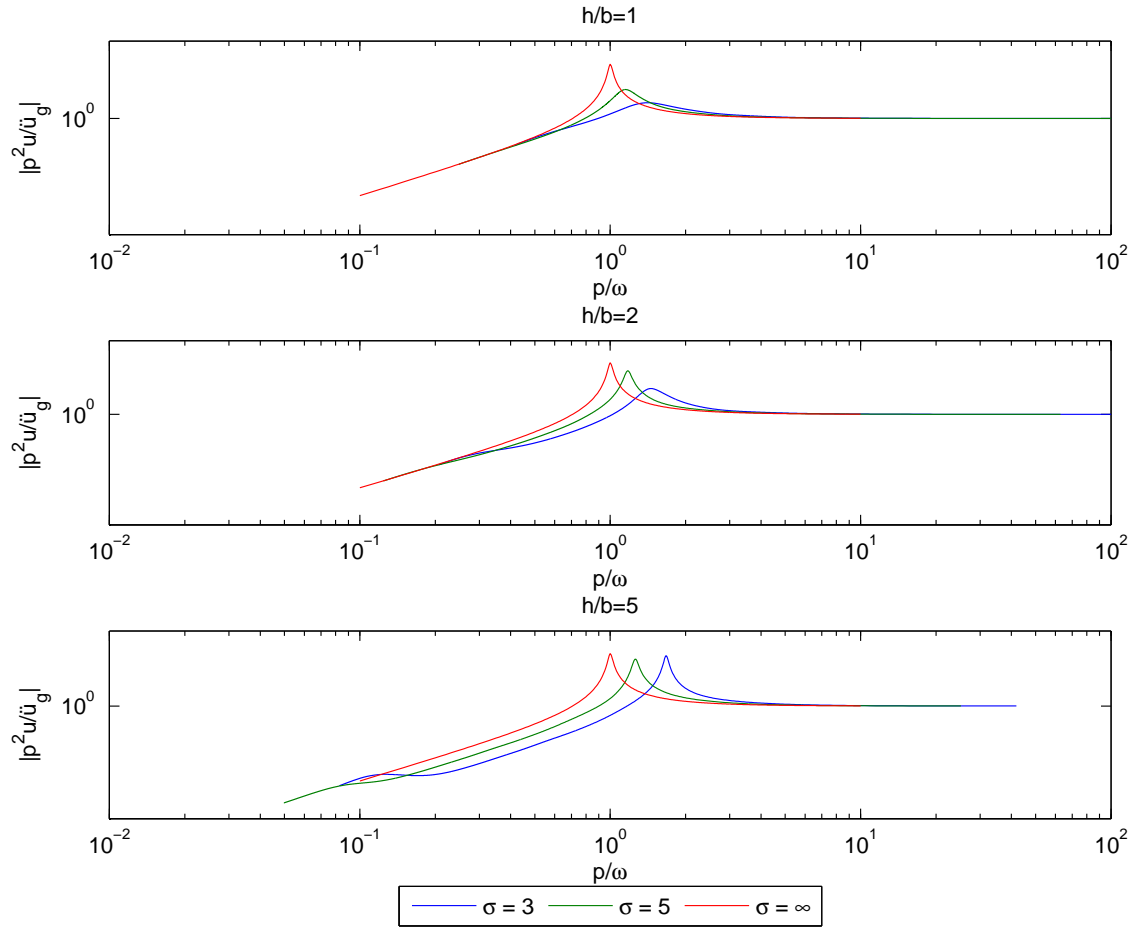


Figura 4.25: Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 4×4 pilotes. $Ep/Es = 10^2$, $s/d = 2$, $h/b = 1, 2, 5$

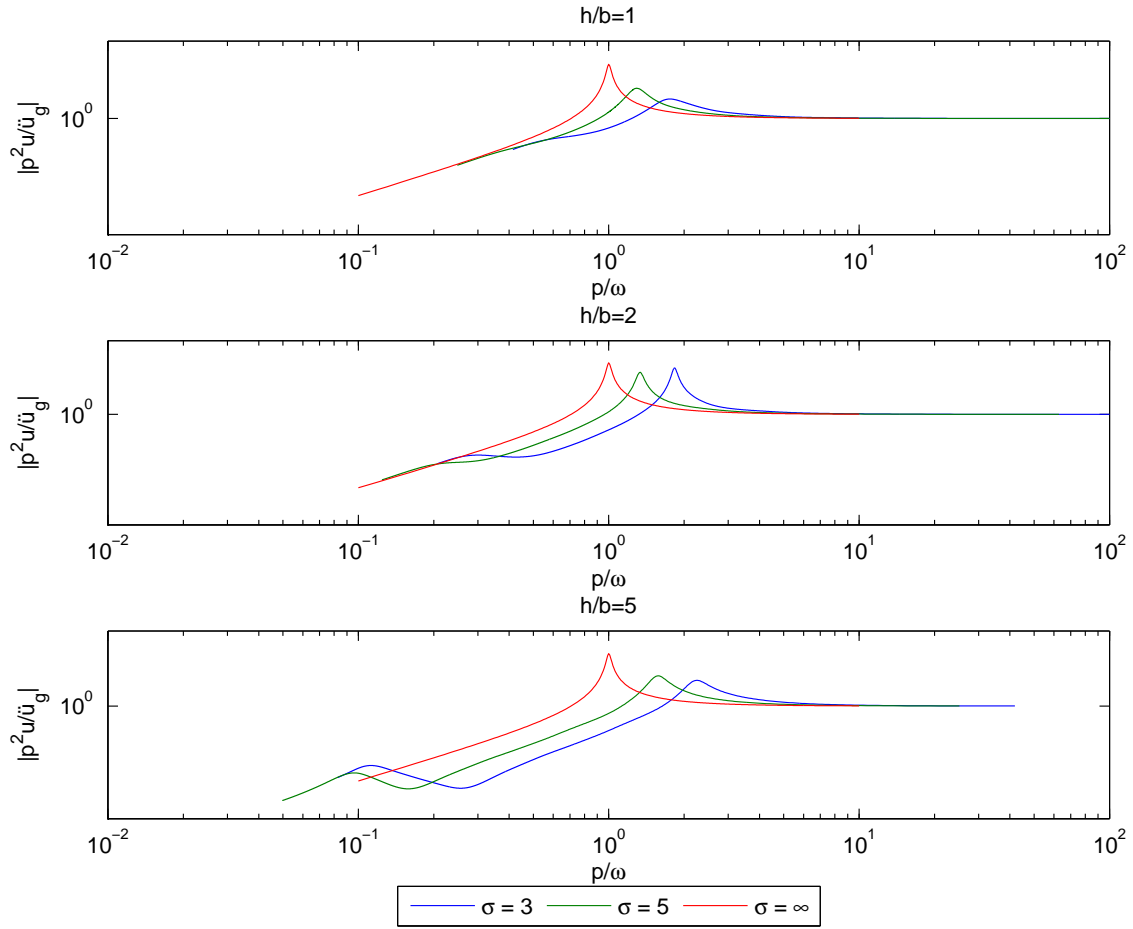


Figura 4.26: Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 4×4 pilotes. $E_p/E_s = 10^2$, $s/d = 5$, $h/b = 1, 2, 5$

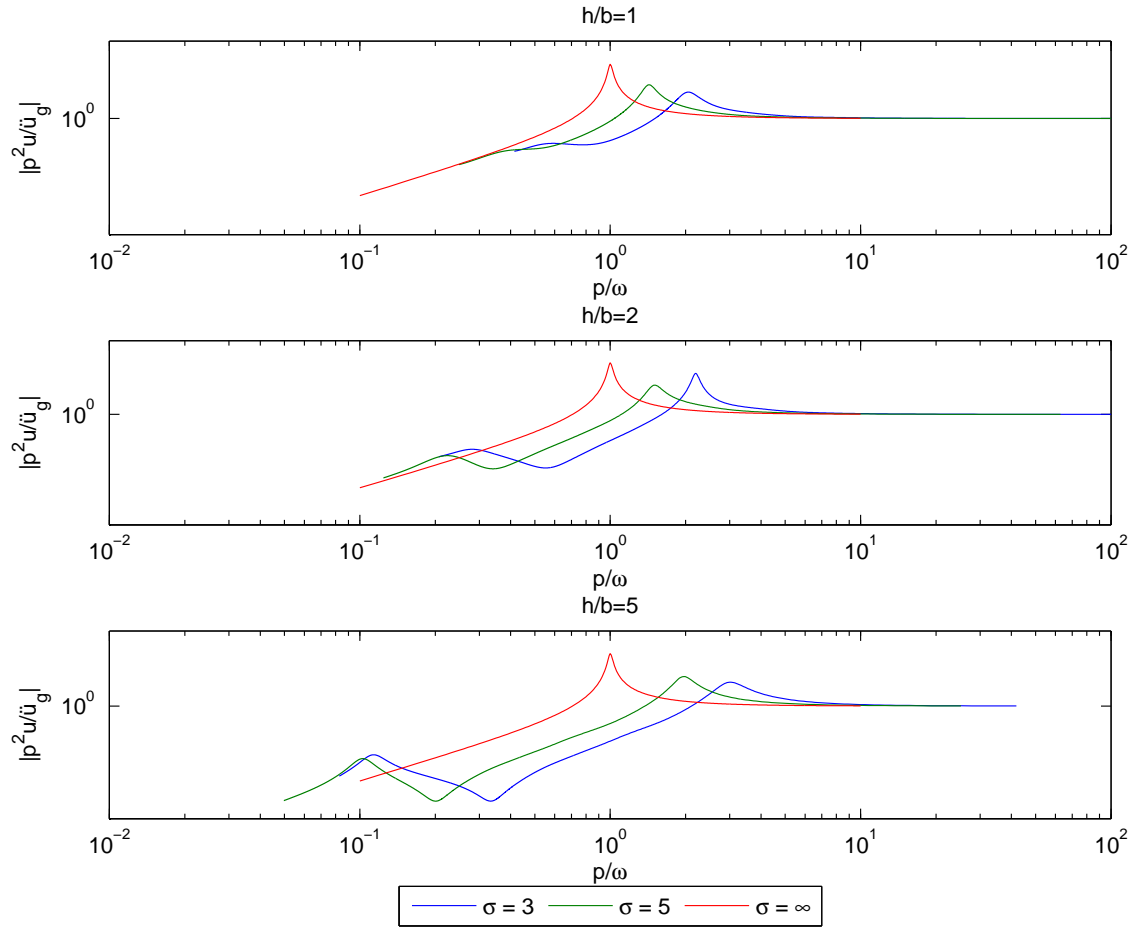


Figura 4.27: Espectro de respuesta para una cimentación con un grupo de 4×4 pilotes. $Ep/Es = 10^2$, $s/d = 10$, $h/b = 1, 2, 5$

4.6. Estudio de la frecuencia natural y el factor de amortiguamiento del sistema

En este apartado se estudia la influencia del parámetro σ , que representa la rigidez relativa entre la estructura y el suelo, en la variación de la frecuencia de resonancia del sistema, así como en la magnitud de la respuesta máxima del mismo.

La frecuencia de resonancia del sistema puede expresarse por el ratio ω/p . Por otra parte, la magnitud de la respuesta máxima del sistema puede asociarse a el ratio de amortiguamiento $\tilde{\xi}$ de un oscilador equivalente de un solo grado de libertad.

Se ha reemplazado el sistema objeto de estudio (*Figura 2.2*) por un sistema de un grado de libertad oscilador. En adelante, la frecuencia circular natural del sistema estará denotada por $\tilde{p} = 2\pi\tilde{f}$, y la fracción de amortiguamiento crítico asociada denotado por $\tilde{\xi}$.

Si el mecanismo de amortiguamiento del oscilador de un solo grado de libertad equivalente se considera de naturaleza histerética, se demuestra que la relación entre el máximo valor de la respuesta Q_m y el ratio de amortiguamiento es

$$\tilde{\xi} = \frac{1}{2Q_m} \quad (4.51)$$

Esta expresión se obtiene partiendo de la ecuación de movimiento del oscilador equivalente

$$[k(1 + 2\xi i) - \omega^2 m]\tilde{u} = -m\ddot{u}_g \quad (4.52)$$

Las *Figuras* de la 4.28 a la 4.43 muestran la evolución de estos parámetros para los casos de cimentaciones pilotadas de 2×2 , 3×3 y 4×4 pilotes, en dos tipos distintos de suelo $E_p/E_s = 10^2, 10^3$, con tres valores diferentes de la distancia entre pilotes, $s/d = 2, 5, 10$, y para valores del ratio de esbeltez $h/b = 1, 2, 5$. La representación gráfica de estos resultados se presenta superpuesta con la representación gráfica de los resultados obtenidos para una cimentación superficial de forma circular inscrita en la base cuadrada de la cimentación pilotada.

En estas curvas se observa como, al contrario de lo que sería esperable, el sistema con cimentación pilotada parece ser menos rígido que el sistema con cimentación superficial. Esto se debe a que las funciones de impedancia dinámica han sido calculadas con un modelo que no considera el contacto entre la cimentación y el suelo, únicamente modela el contacto en la interfaz suelo-pilote.

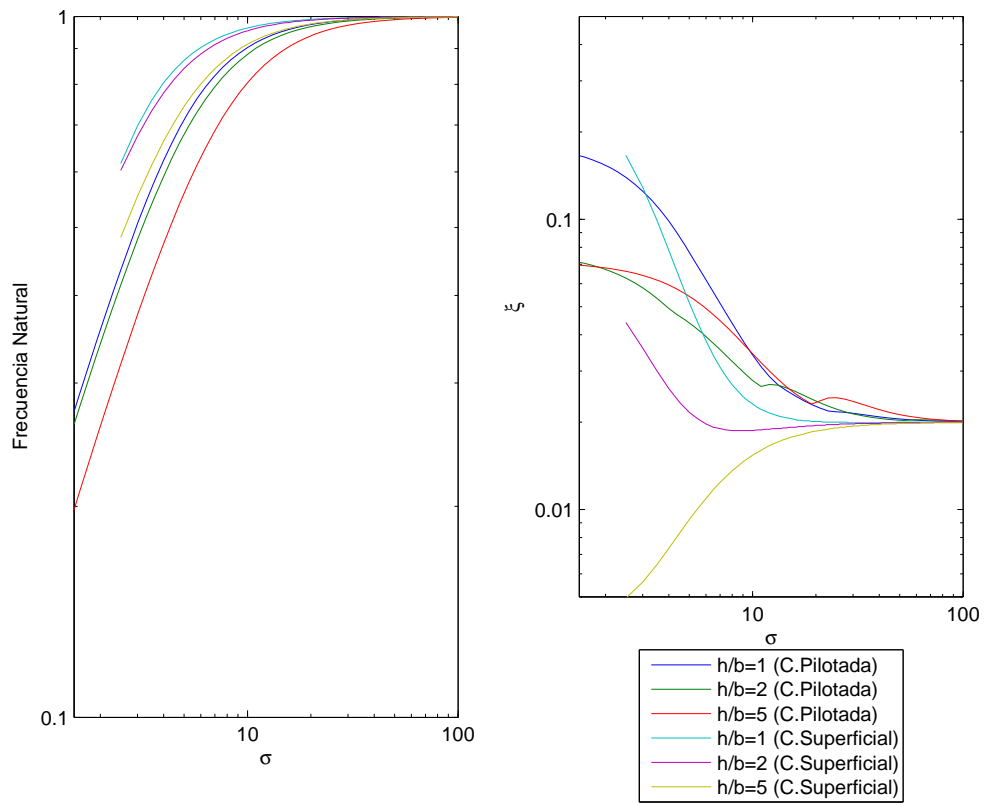


Figura 4.28: Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 2×2 pilotes. $E_p/E_s = 10^3$, $s/d = 5$, $h/b = 1, 2, 5$

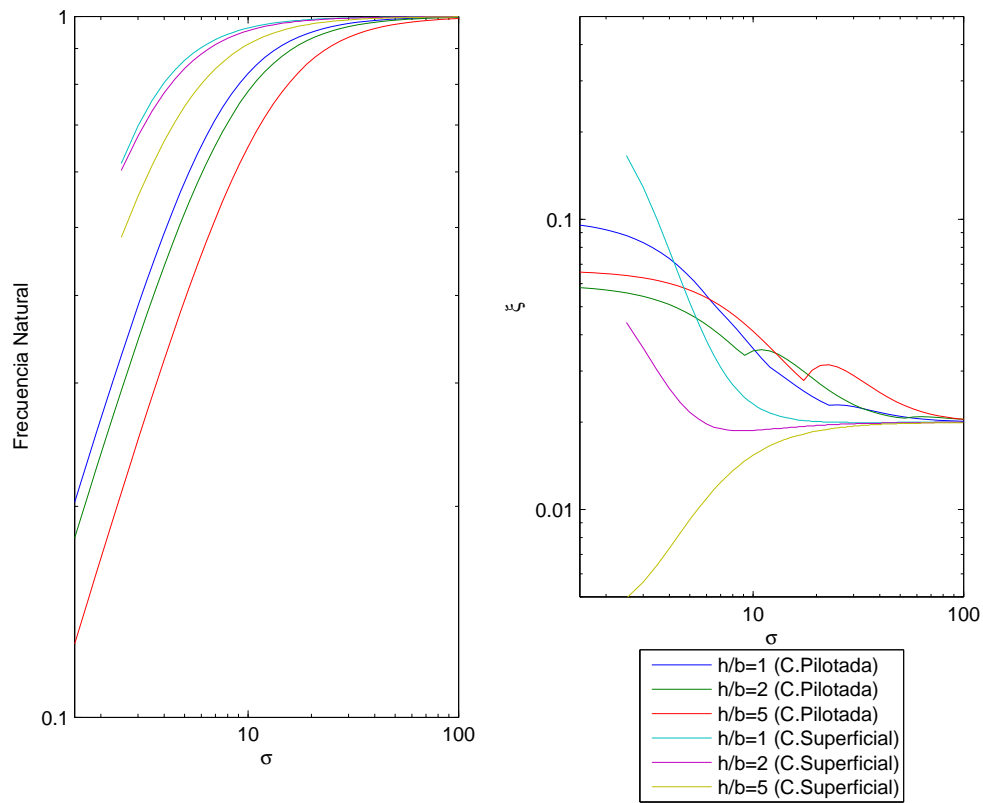


Figura 4.29: Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 2×2 pilotes. $E_p/E_s = 10^3$, $s/d = 10$, $h/b = 1, 2, 5$

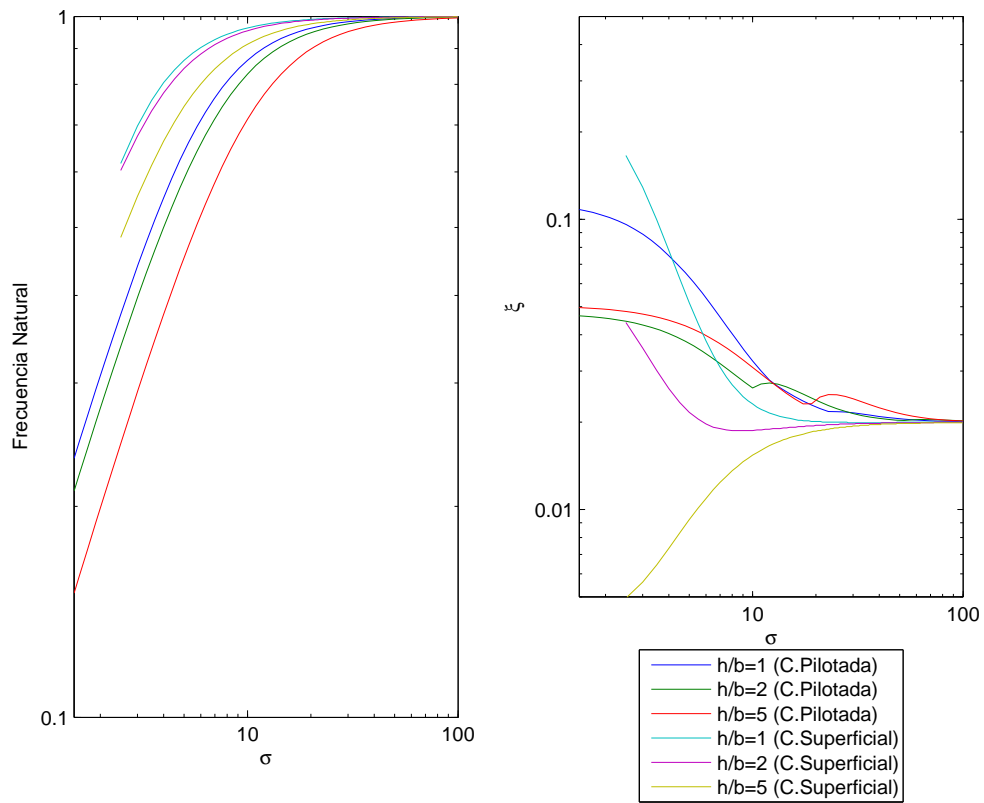


Figura 4.30: Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 2×2 pilotes. $E_p/E_s = 10^2$, $s/d = 5$, $h/b = 1, 2, 5$

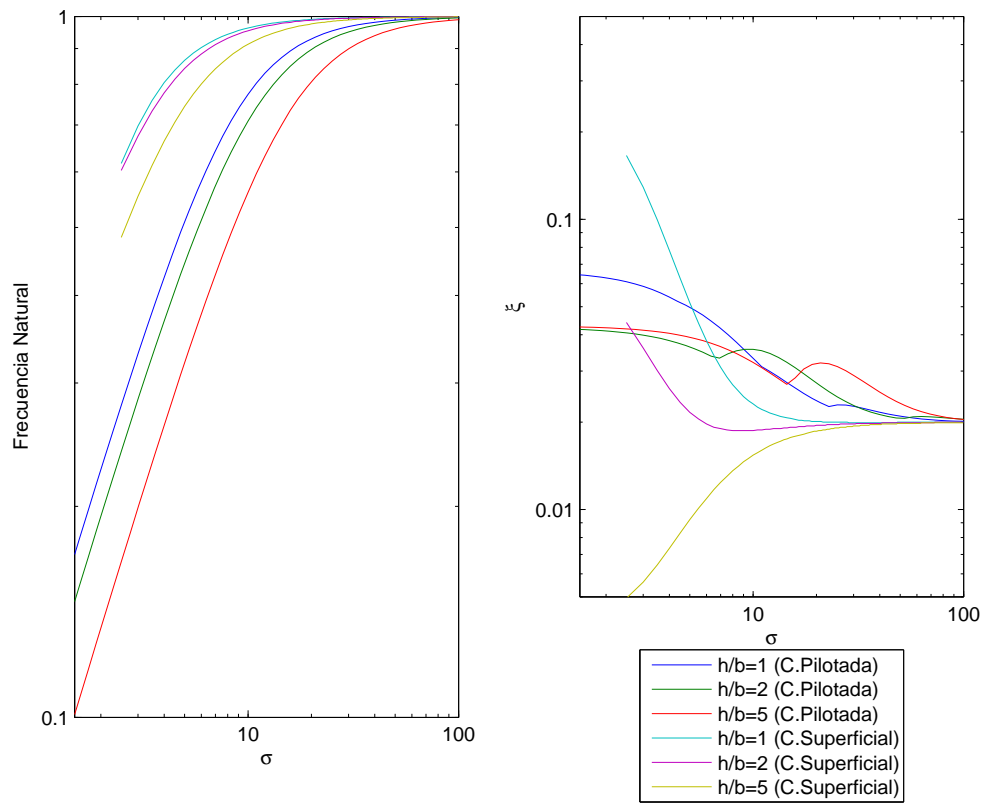


Figura 4.31: Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 2×2 pilotes. $E_p/E_s = 10^2$, $s/d = 10$, $h/b = 1, 2, 5$

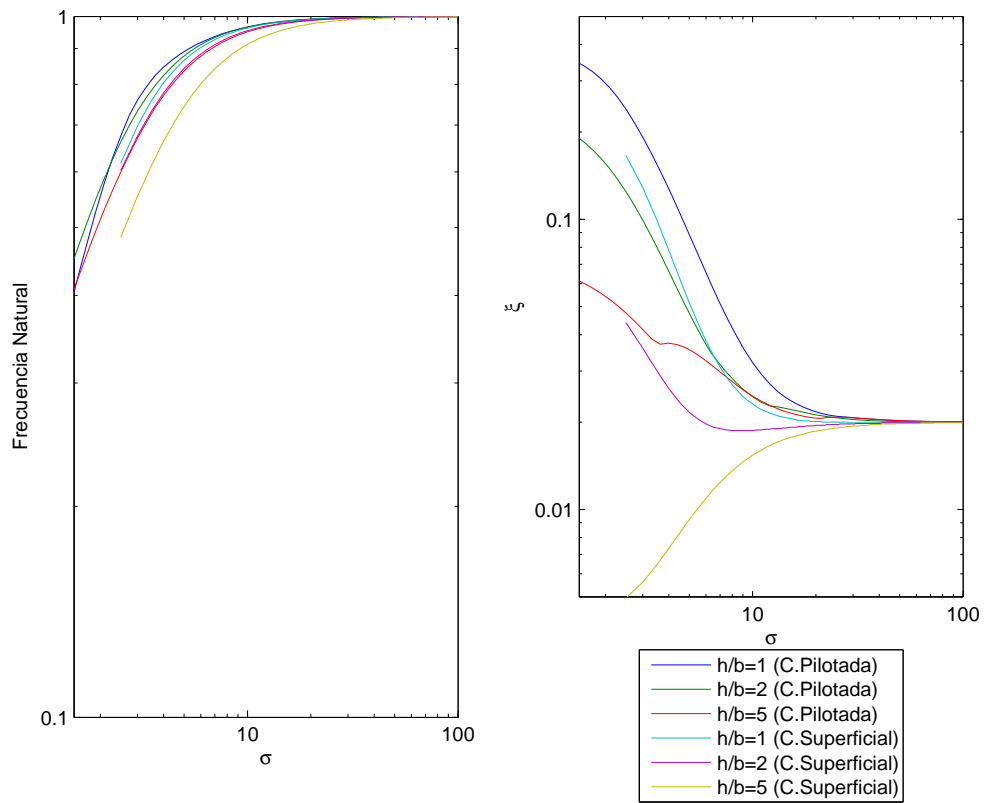


Figura 4.32: Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 3×3 pilotes. $E_p/E_s = 10^3$, $s/d = 2$, $h/b = 1, 2, 5$

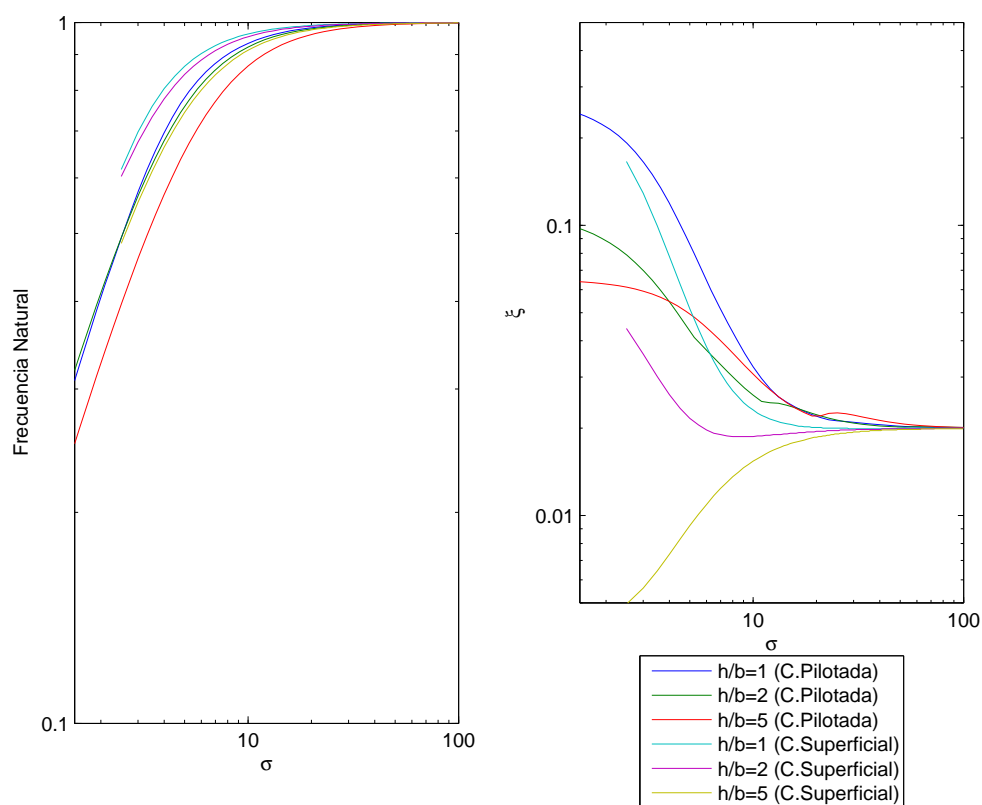


Figura 4.33: Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 3×3 pilotes. $E_p/E_s = 10^3$, $s/d = 5$, $h/b = 1, 2, 5$

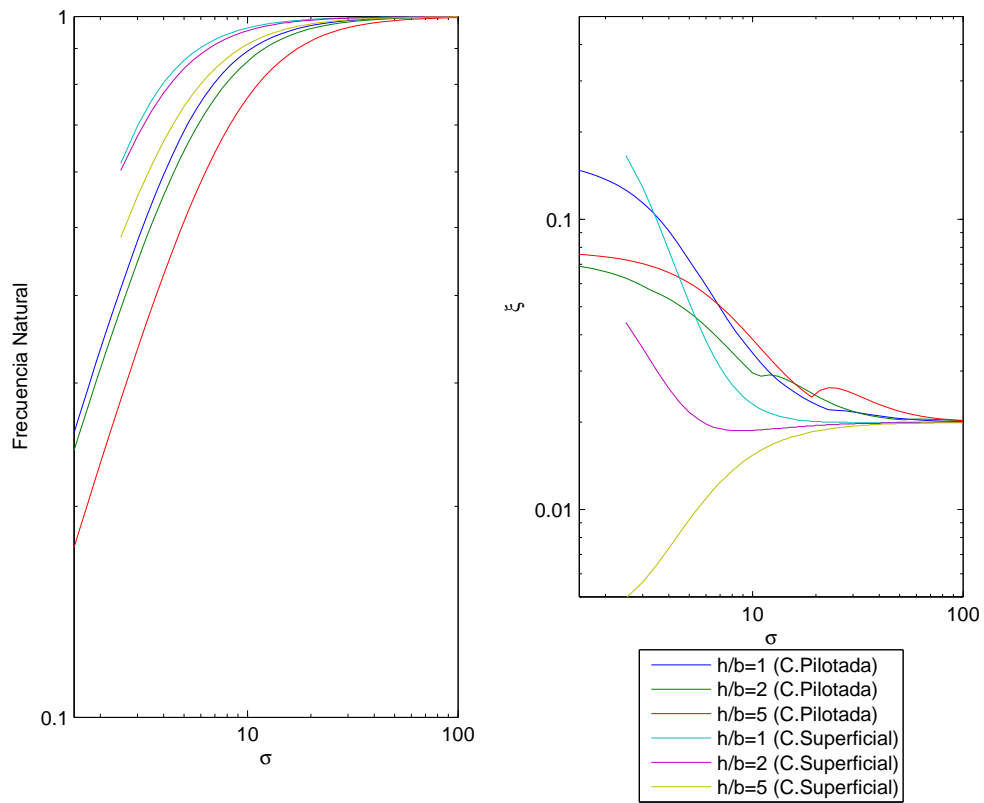


Figura 4.34: Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 3×3 pilotes. $E_p/E_s = 10^3$, $s/d = 10$, $h/b = 1, 2, 5$

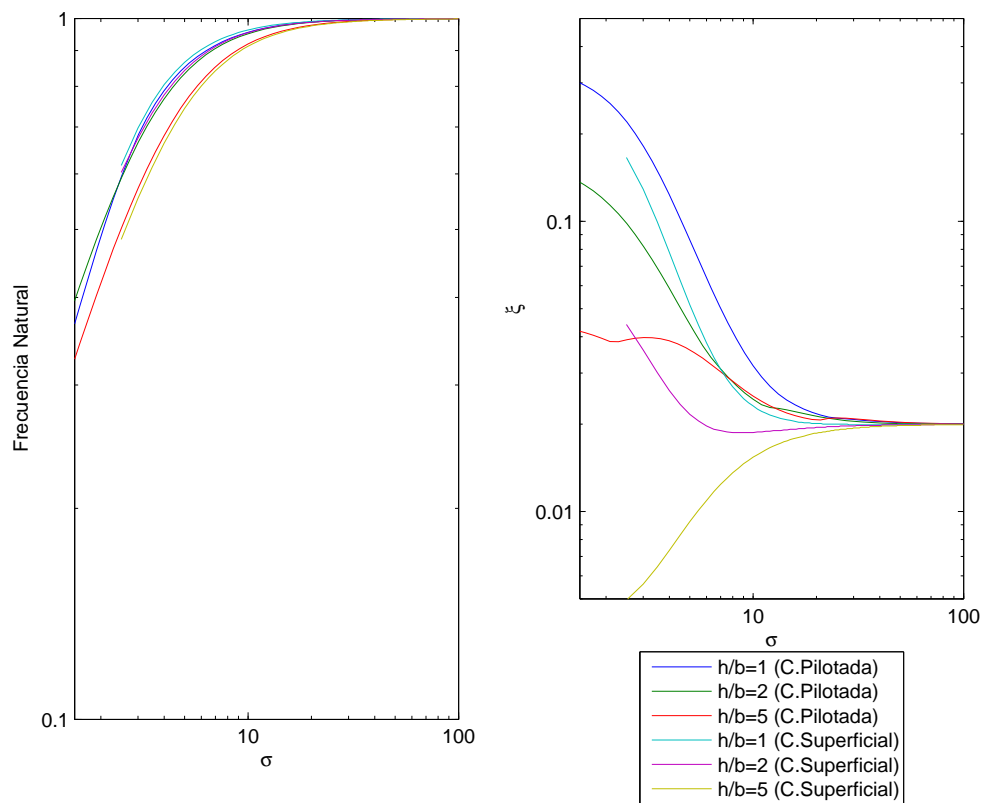


Figura 4.35: Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 3×3 pilotes. $E_p/E_s = 10^2$, $s/d = 2$, $h/b = 1, 2, 5$

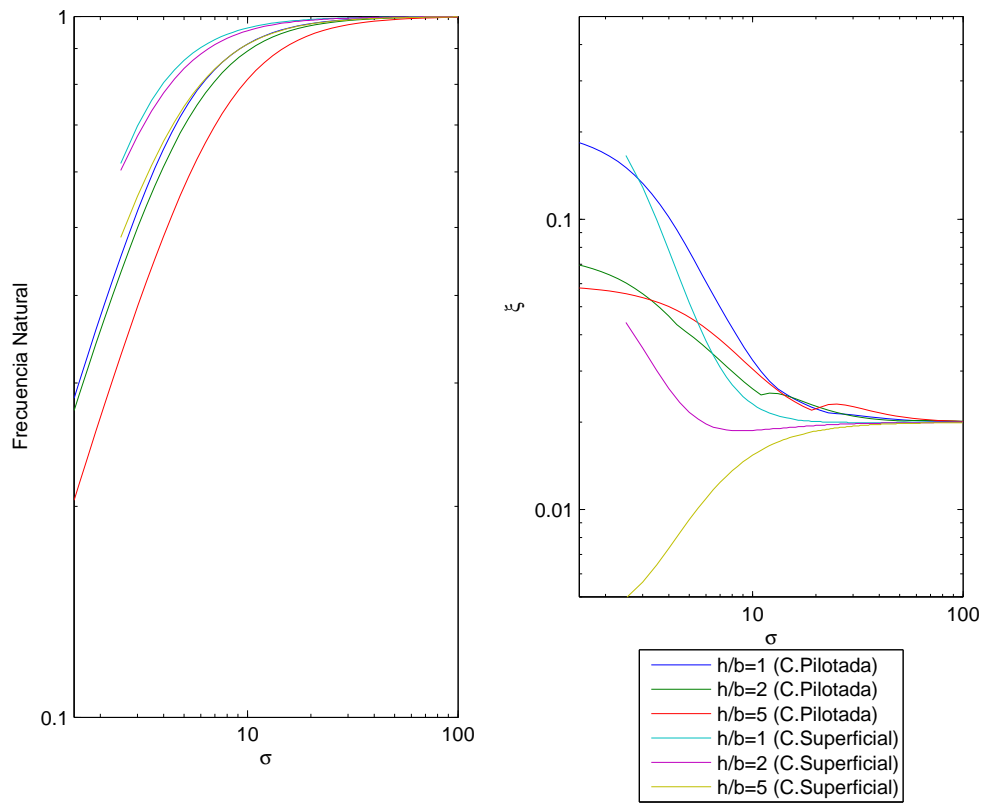


Figura 4.36: Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 3×3 pilotes. $E_p/E_s = 10^2$, $s/d = 5$, $h/b = 1, 2, 5$

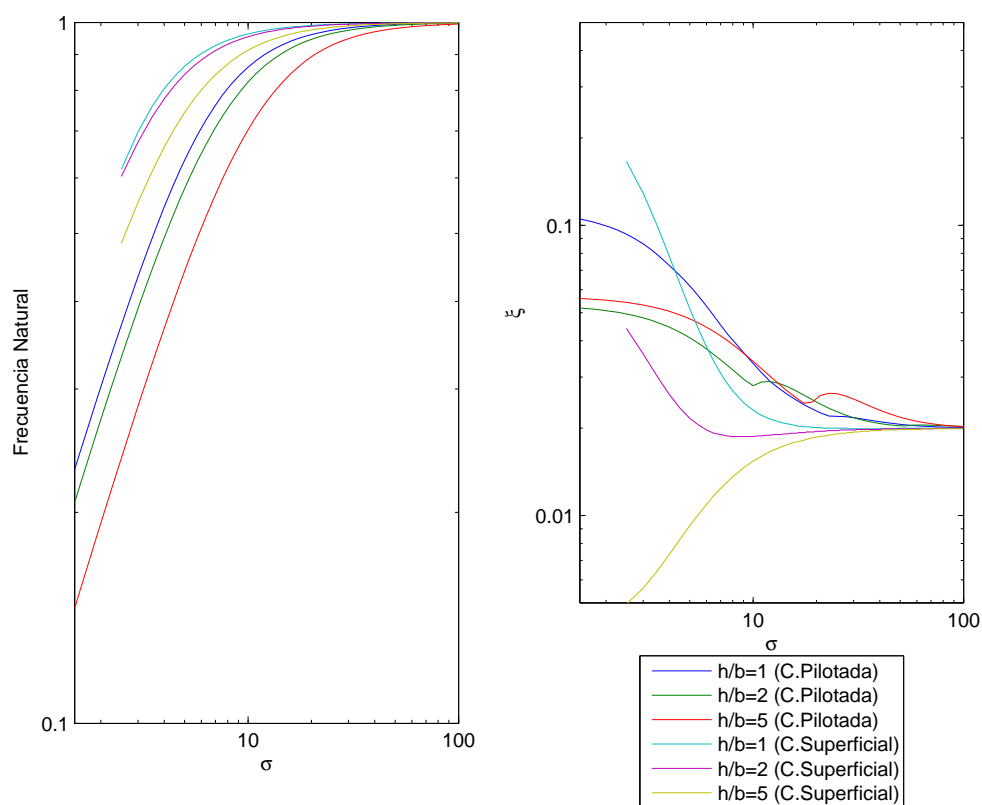


Figura 4.37: Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 3×3 pilotes. $E_p/E_s = 10^2$, $s/d = 10$, $h/b = 1, 2, 5$

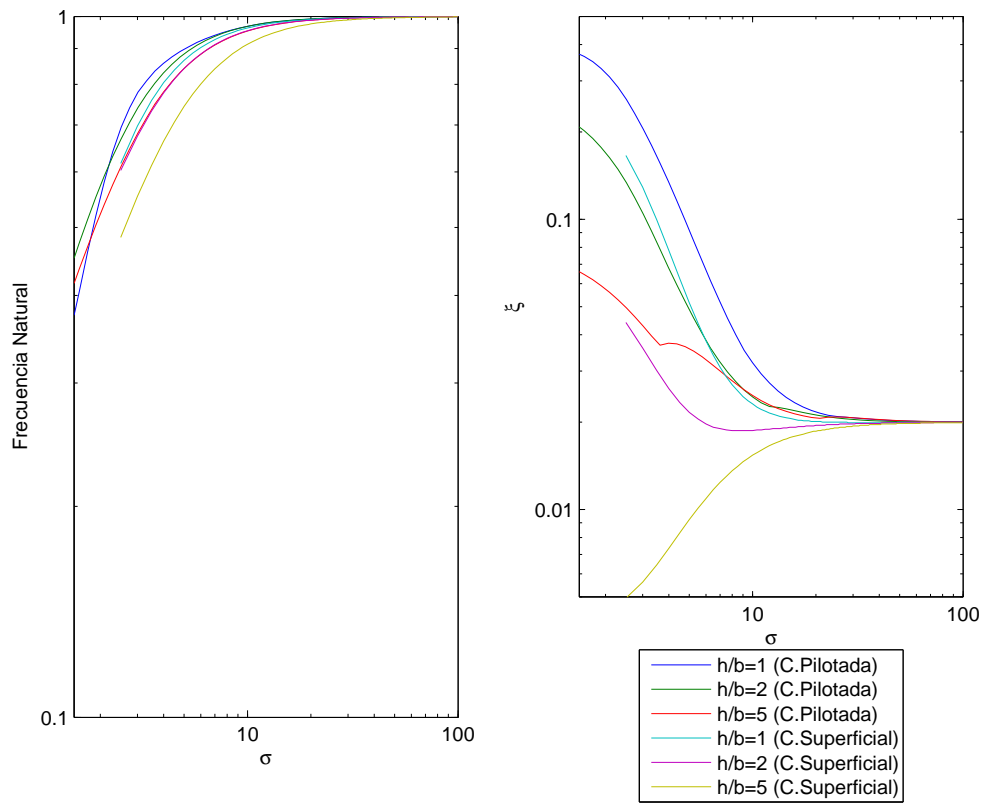


Figura 4.38: Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 4×4 pilotes. $E_p/E_s = 10^3$, $s/d = 2$, $h/b = 1, 2, 5$

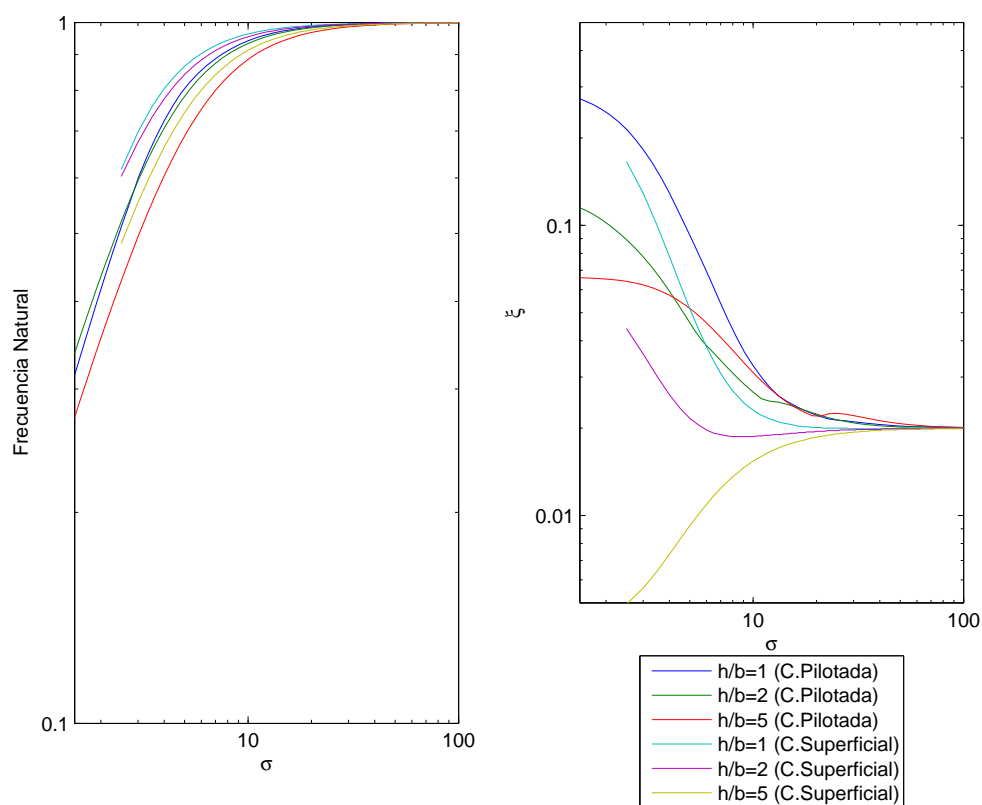


Figura 4.39: Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 4×4 pilotes. $E_p/E_s = 10^3$, $s/d = 5$, $h/b = 1, 2, 5$

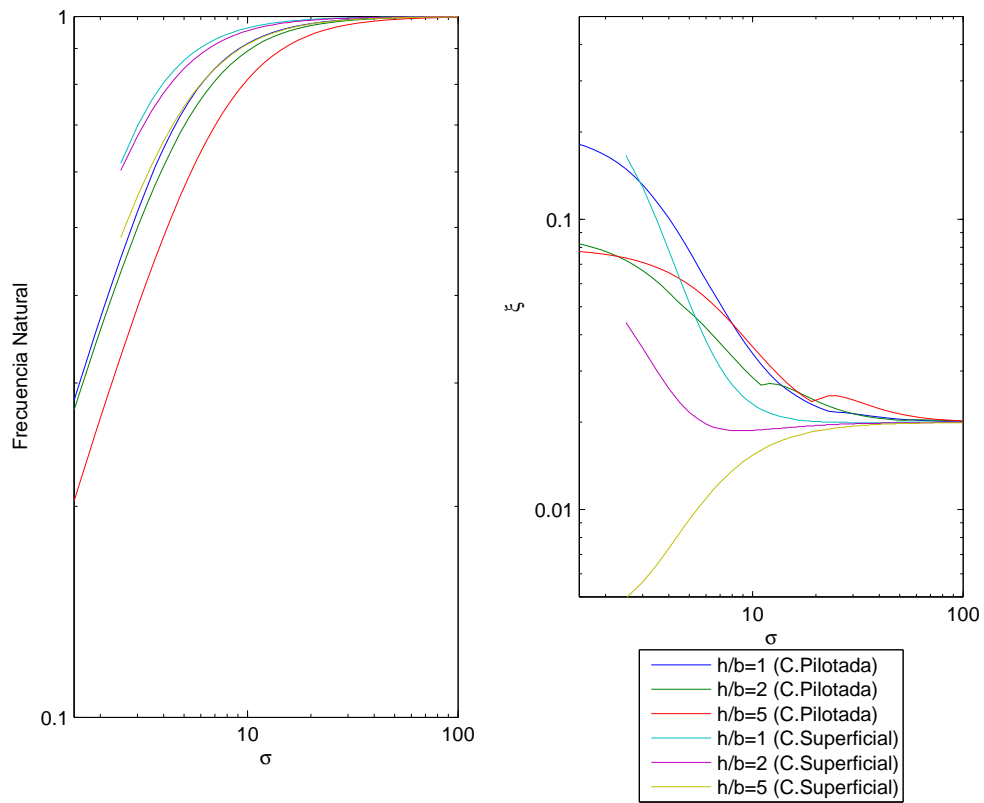


Figura 4.40: Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 4×4 pilotes. $E_p/E_s = 10^3$, $s/d = 10$, $h/b = 1, 2, 5$

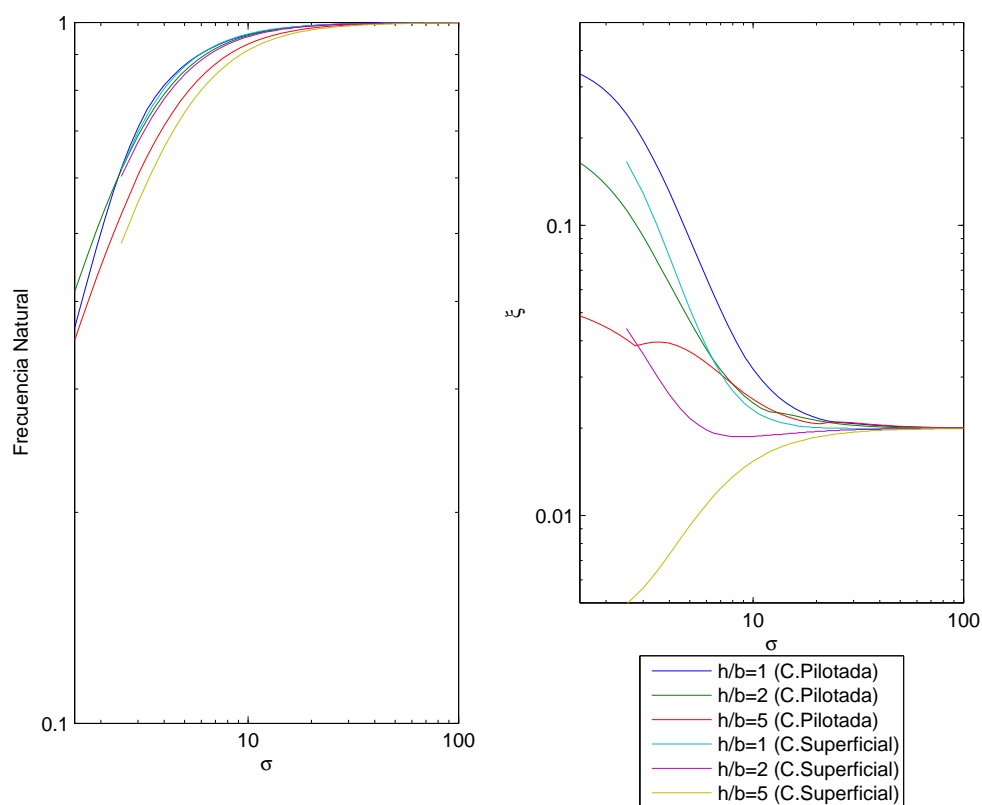


Figura 4.41: Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 4×4 pilotes. $E_p/E_s = 10^2$, $s/d = 2$, $h/b = 1, 2, 5$

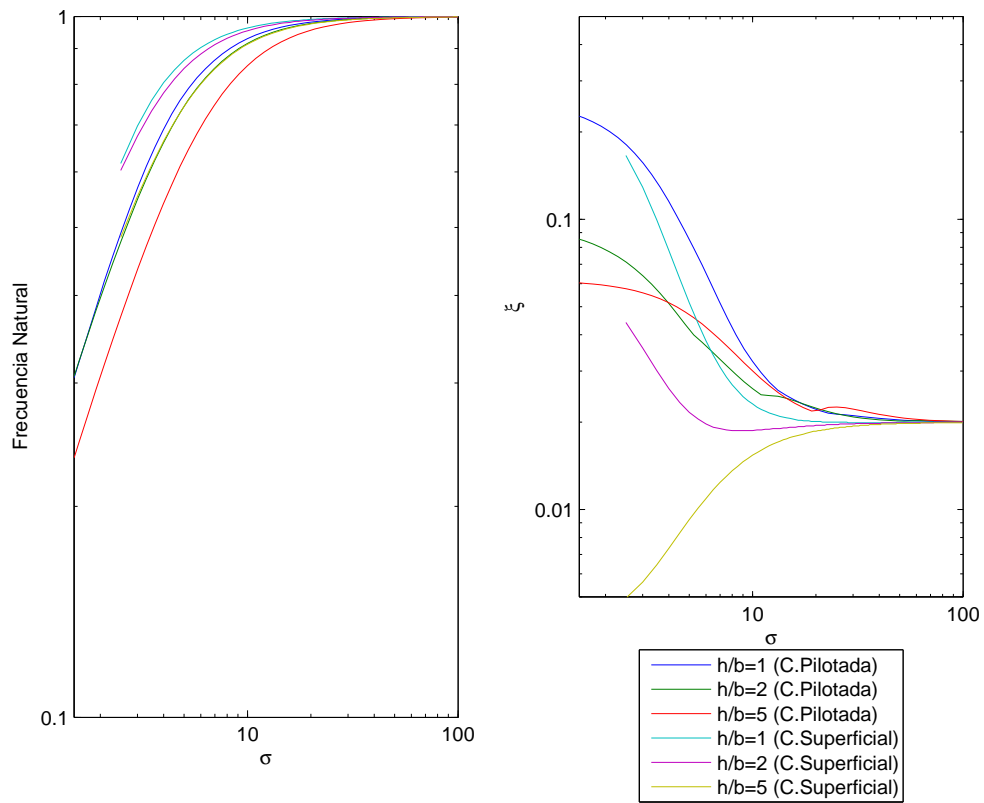


Figura 4.42: Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 4×4 pilotes. $E_p/E_s = 10^2$, $s/d = 5$, $h/b = 1, 2, 5$

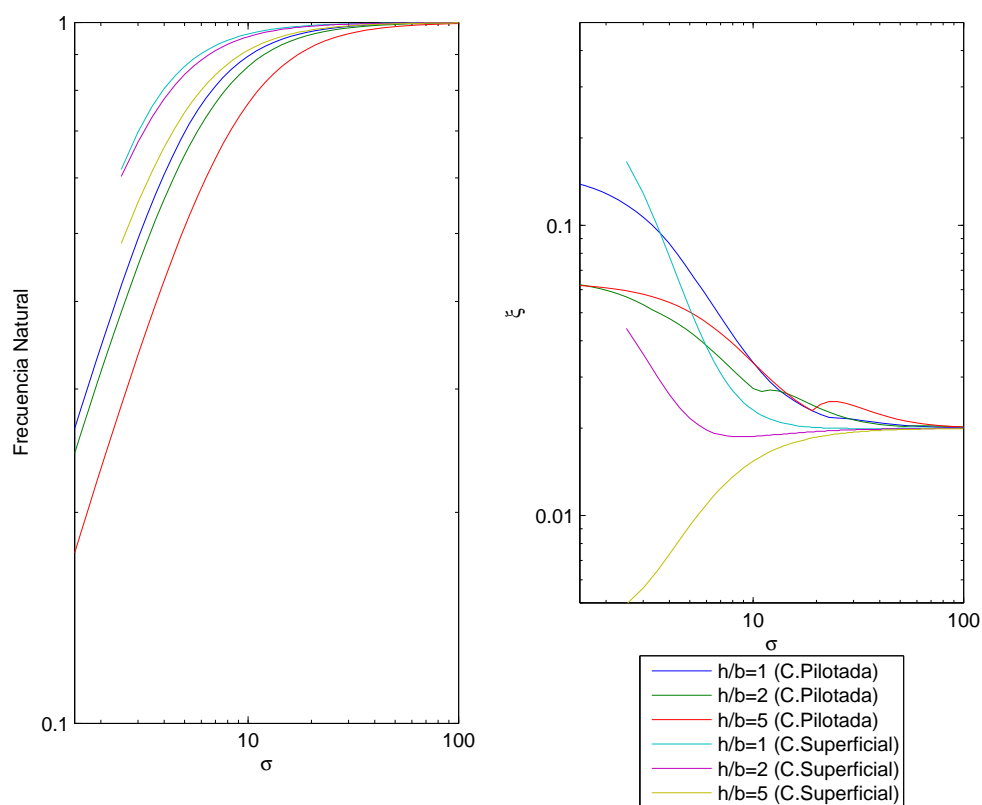


Figura 4.43: Frecuencia natural \tilde{f}/f y factor de amortiguamiento ξ para una cimentación con un grupo de 4×4 pilotes. $E_p/E_s = 10^2$, $s/d = 10$, $h/b = 1, 2, 5$

Las Figuras de la 4.44 a la 4.49 muestran la influencia del número de pilotes sobre los parámetros \tilde{f}/f y $\tilde{\xi}$. En ellas se observa, como era previsible, que el aumento del número de pilotes hace que aumente la rigidez del sistema.

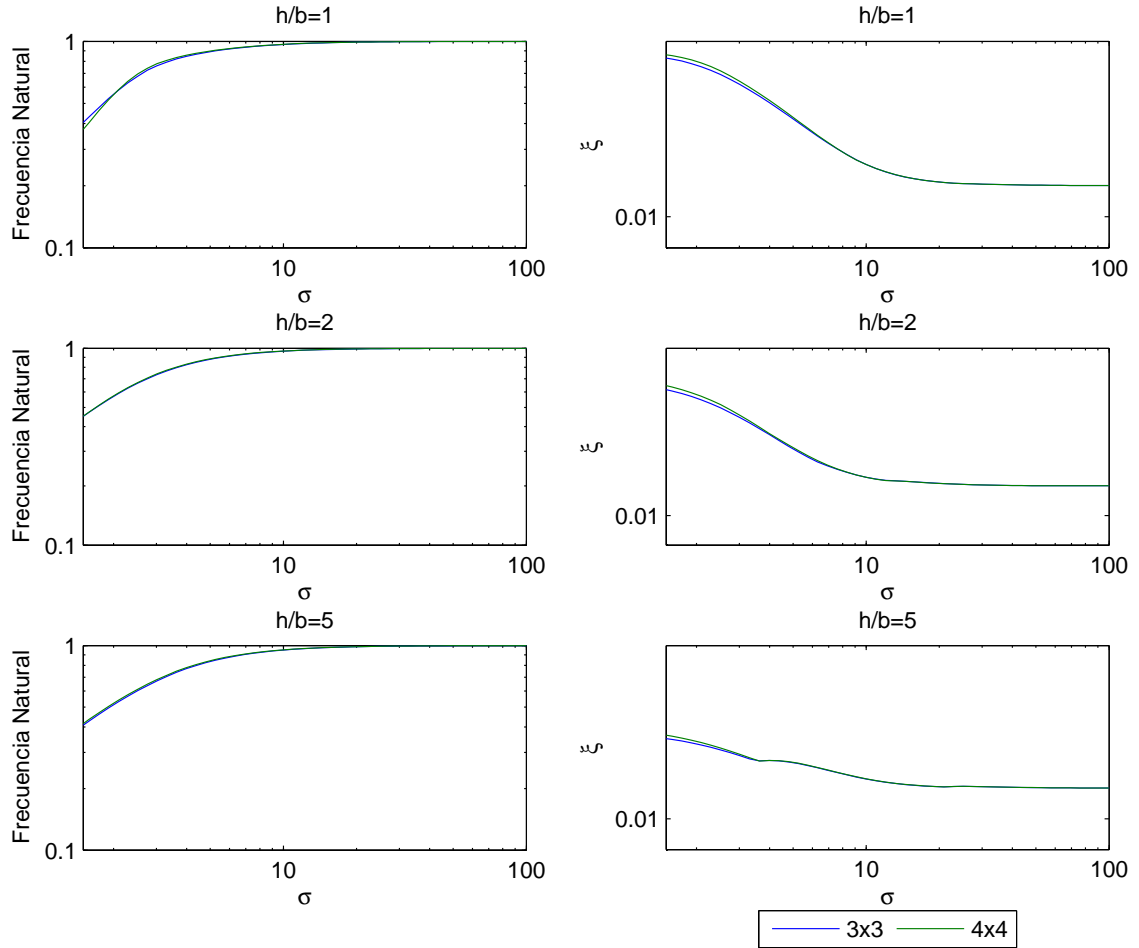


Figura 4.44: Influencia del número de pilotes en la frecuencia natural \tilde{f}/f y el factor de amortiguamiento ξ . $E_p/E_s = 10^3$, $s/d = 2$, $h/b = 1, 2, 5$

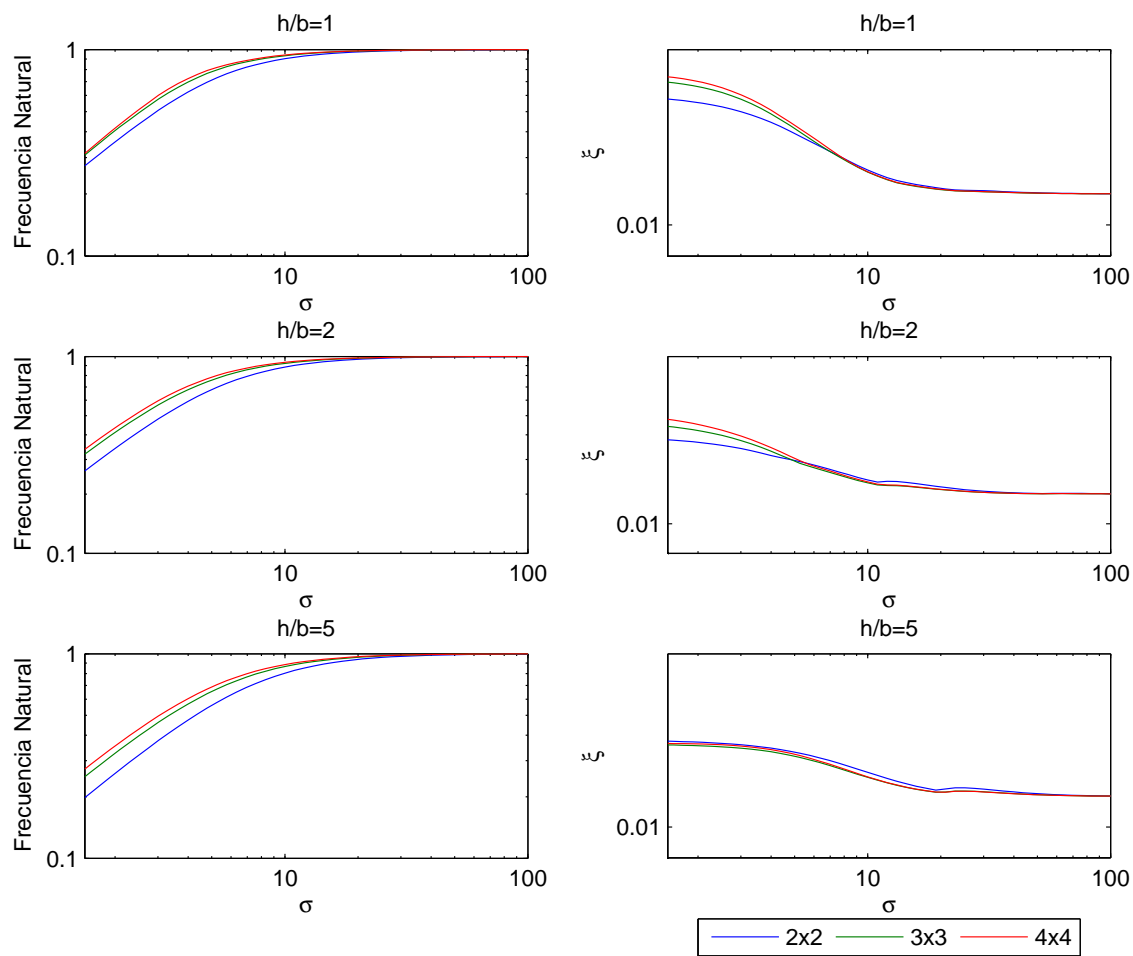


Figura 4.45: Influencia del número de pilotes en la frecuencia natural \tilde{f}/f y el factor de amortiguamiento ξ . $E_p/E_s = 10^3$, $s/d = 5$, $h/b = 1, 2, 5$

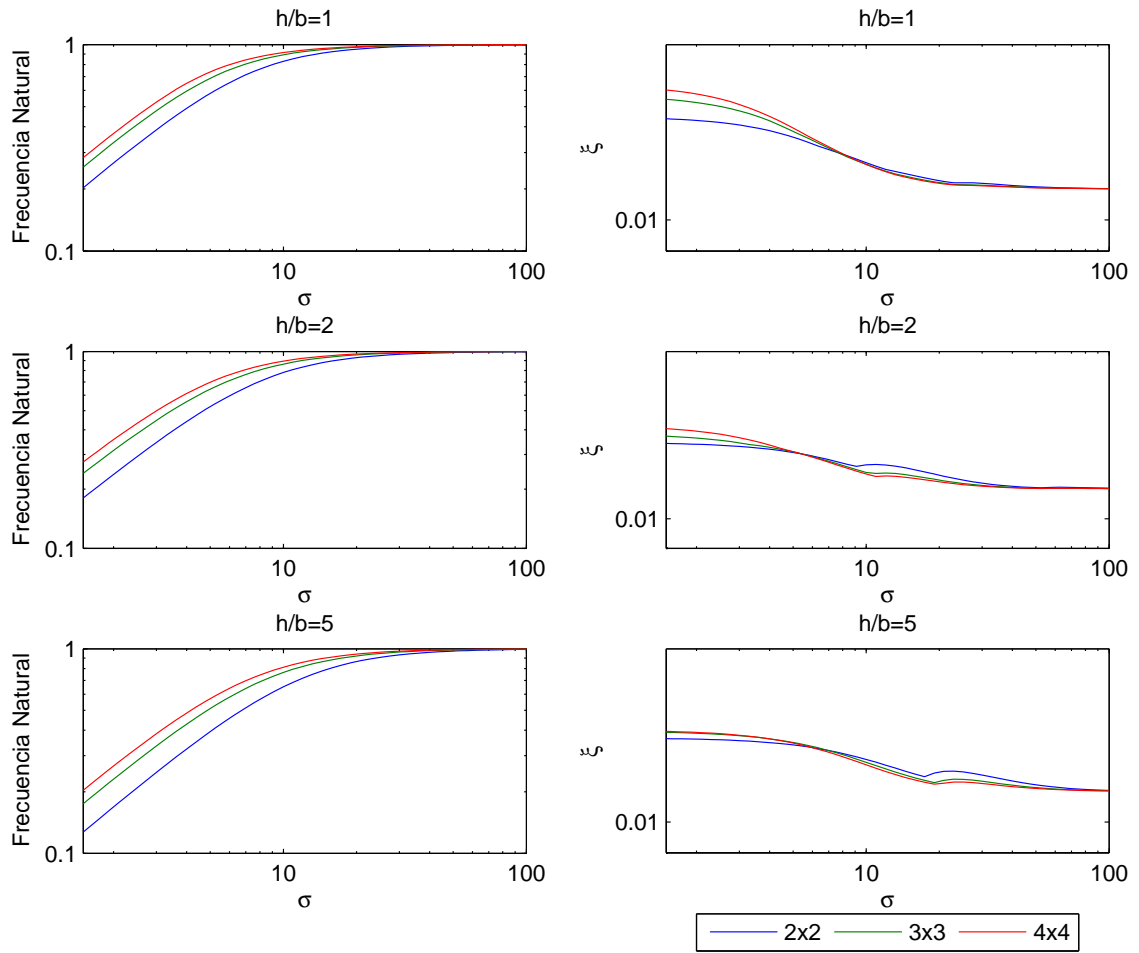


Figura 4.46: Influencia del número de pilotes en la frecuencia natural \tilde{f}/f y el factor de amortiguamiento ξ . $E_p/E_s = 10^3$, $s/d = 10$, $h/b = 1, 2, 5$

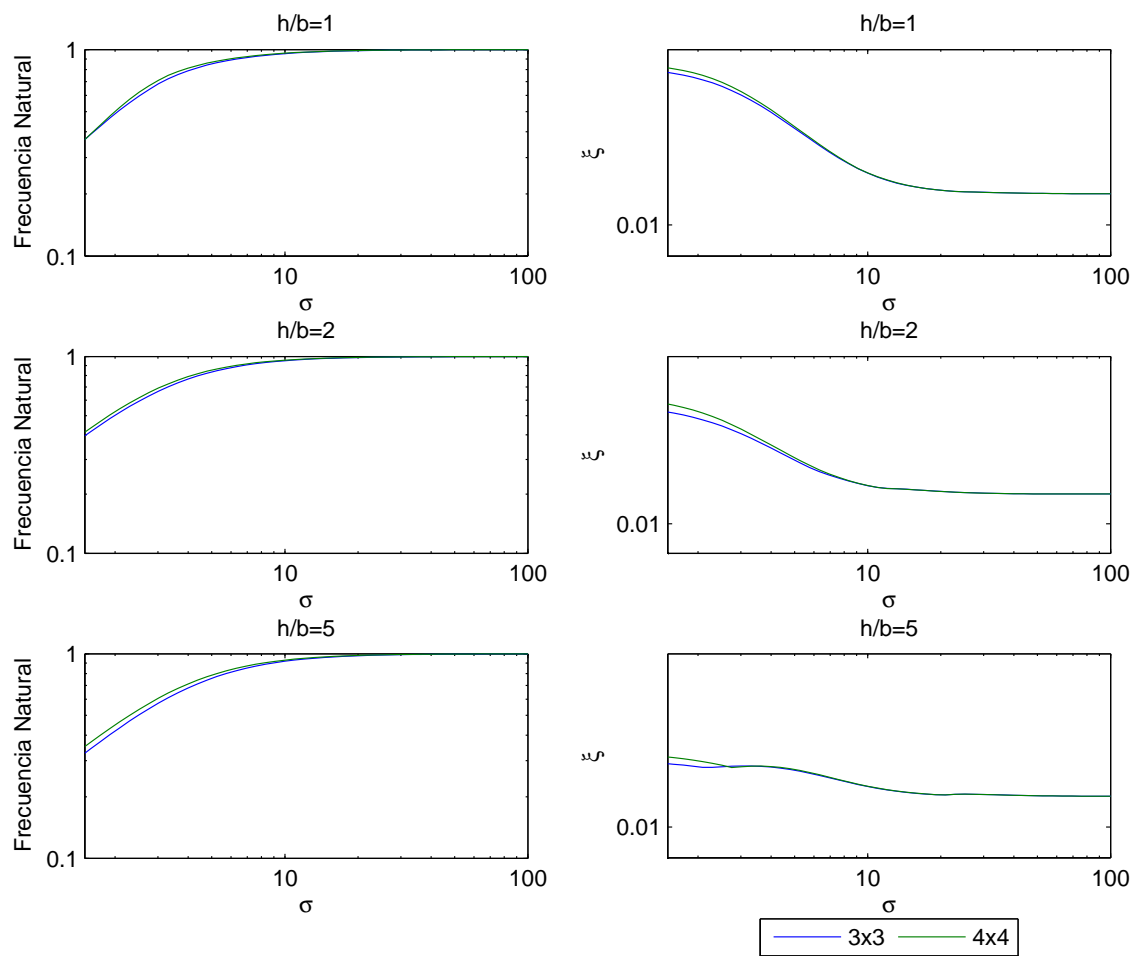


Figura 4.47: Influencia del número de pilotes en la frecuencia natural \tilde{f}/f y el factor de amortiguamiento ξ . $E_p/E_s = 10^2$, $s/d = 2$, $h/b = 1, 2, 3$

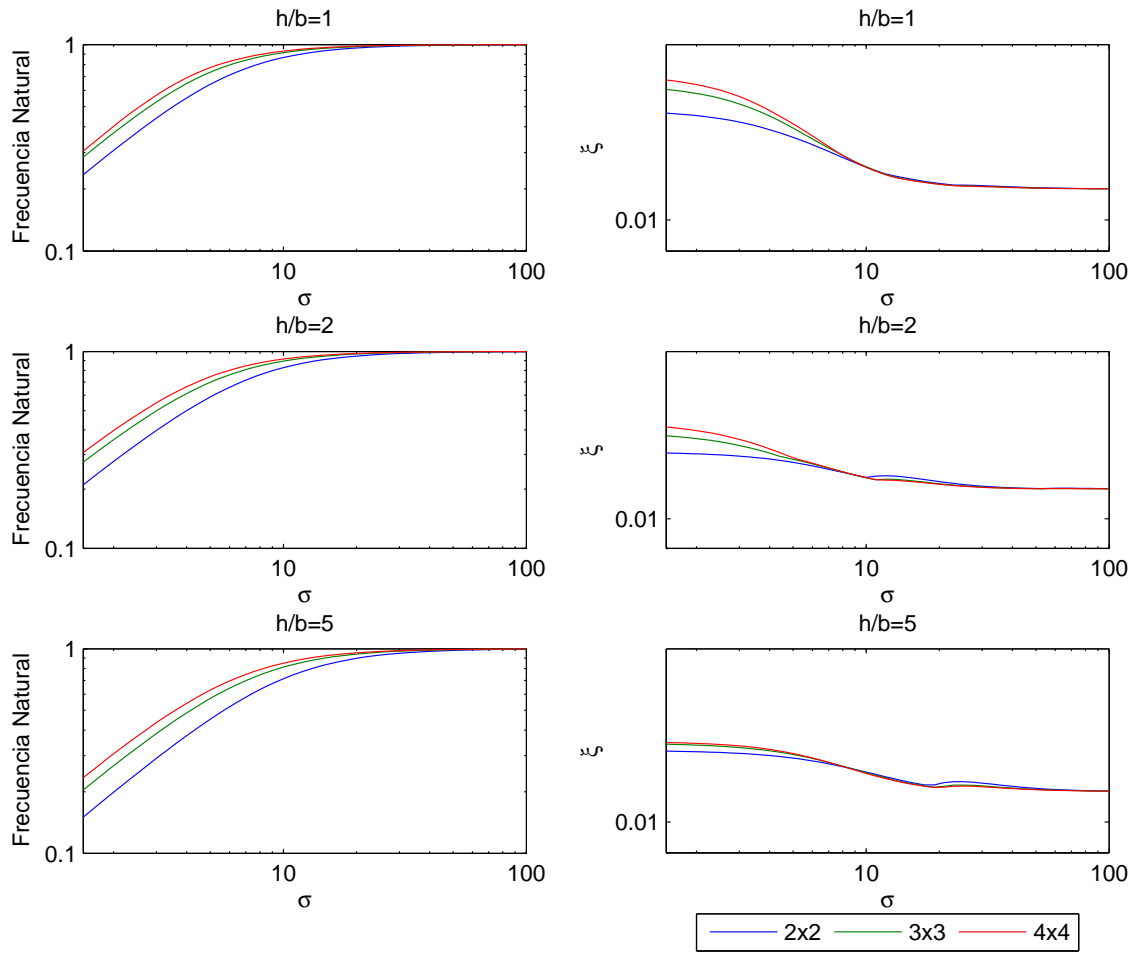


Figura 4.48: Influencia del número de pilotes en la frecuencia natural \tilde{f}/f y el factor de amortiguamiento ξ . $E_p/E_s = 10^2$, $s/d = 5$, $h/b = 1, 2, 5$

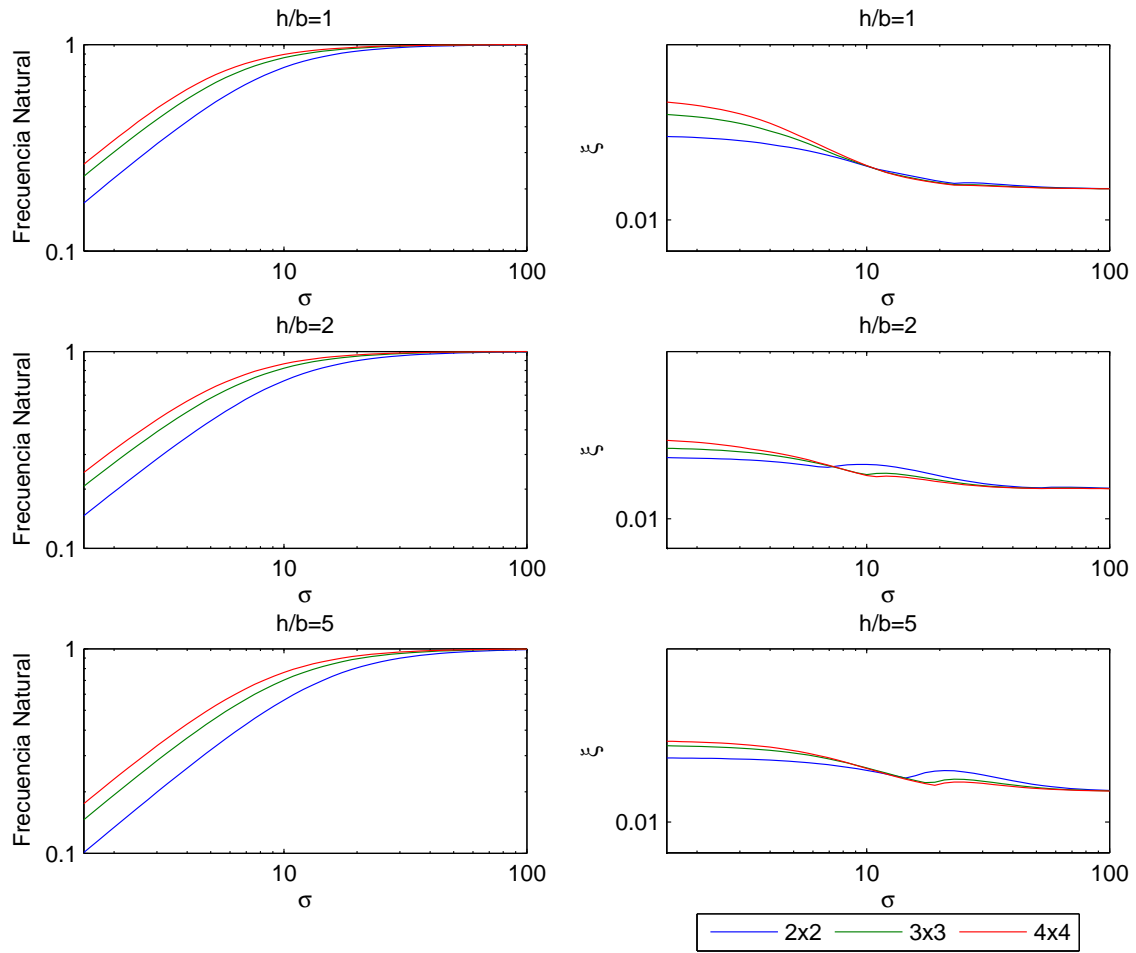


Figura 4.49: Influencia del número de pilotes en la frecuencia natural \tilde{f}/f y el factor de amortiguamiento ξ . $E_p/E_s = 10^2$, $s/d = 10$, $h/b = 1, 2, 5$

Las *Figuras* de la 4.50 a la 4.55 muestran la influencia de la separación entre pilotes sobre los parámetros \tilde{f}/f y ξ . En una observación preliminar de los gráficos, parece que al aumentar la distancia entre los pilotes, disminuye la rigidez del conjunto. Sin embargo, por tratarse de resultados de carácter adimensional, la interpretación de los mismos debe tener en cuenta la influencia de la variación del parámetro s/d sobre el resto de parámetros adimensionales del problema. Cabe destacar que en las gráficas mostradas, el conjunto con mayor separación entre pilotes se asienta en un suelo más flexible.

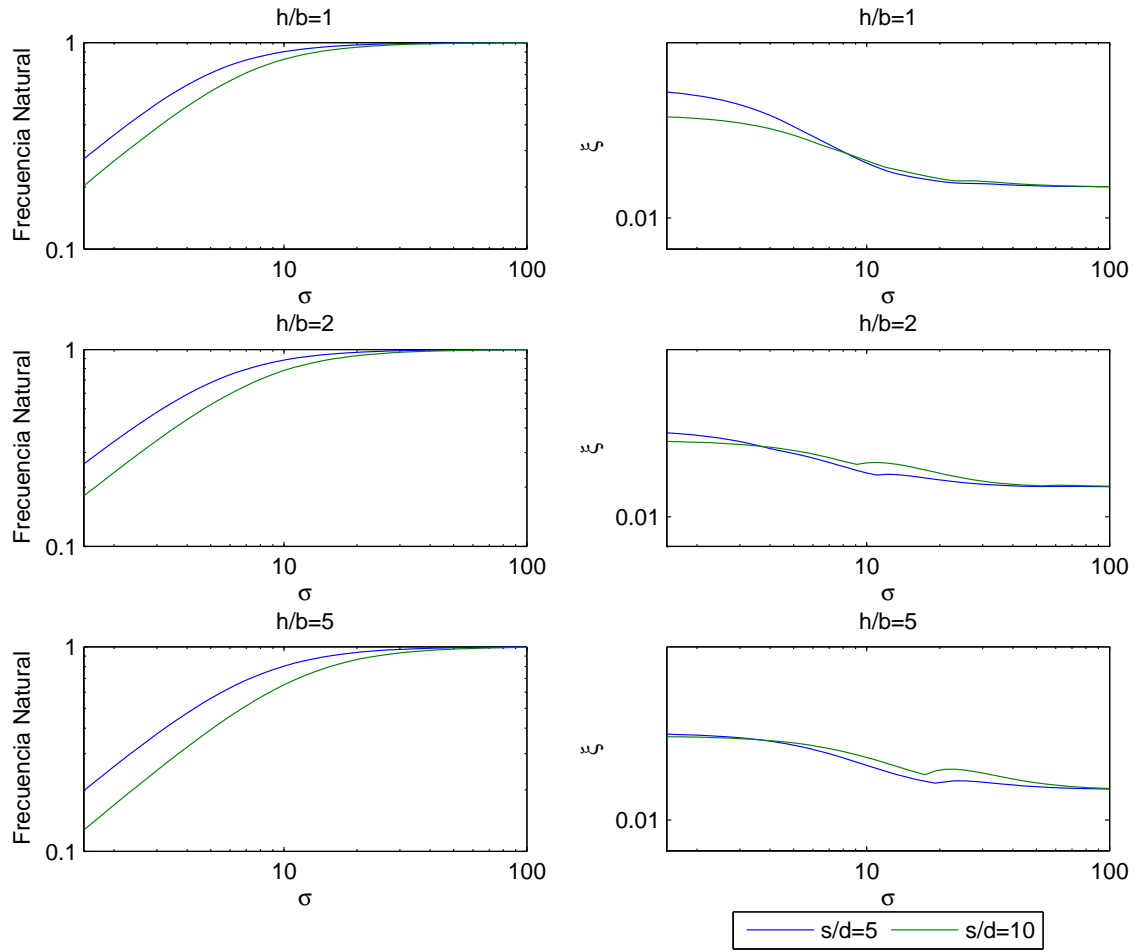


Figura 4.50: Influencia de la separación entre pilotes de un grupo de 2×2 en la frecuencia natural \tilde{f}/f y el factor de amortiguamiento ξ . $E_p/E_s = 10^3$, $h/b = 1, 2, 5$

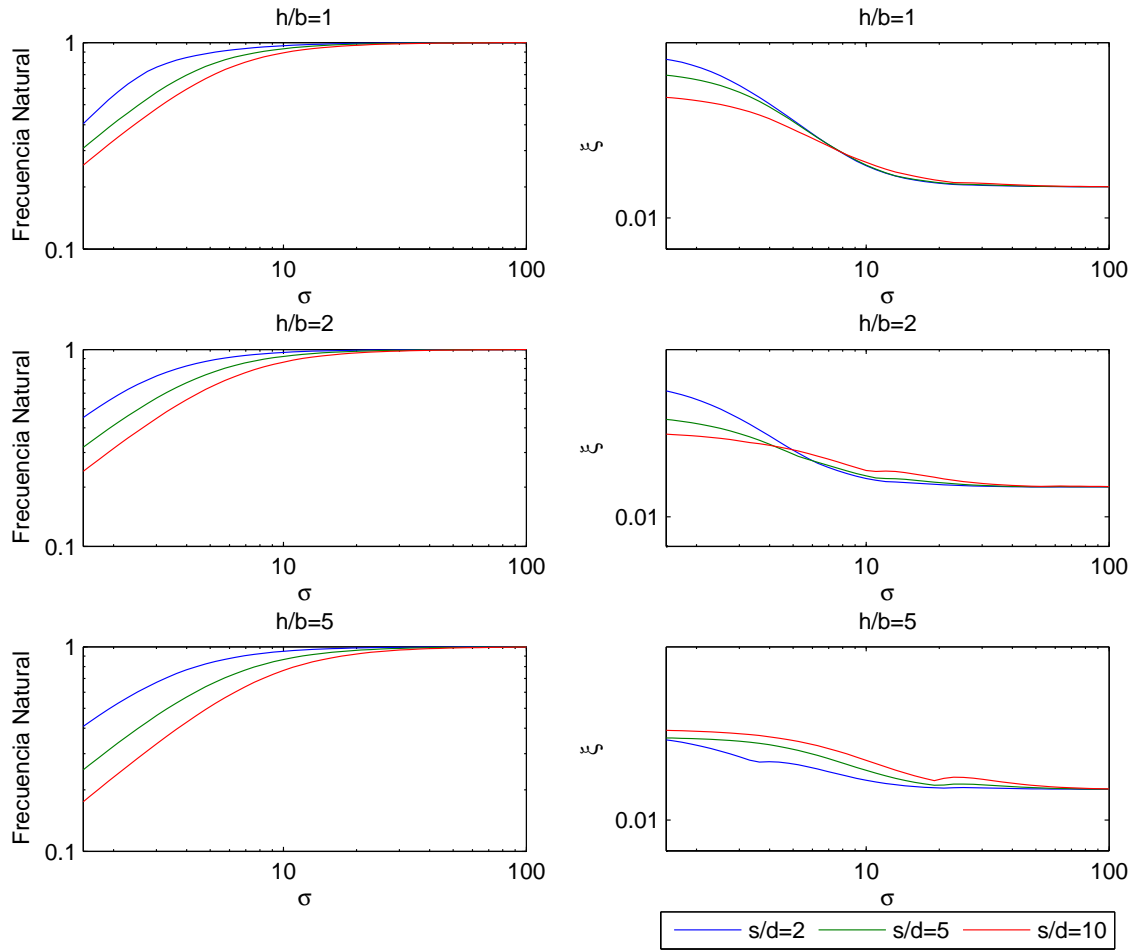


Figura 4.51: Influencia de la separación entre pilotes de un grupo de 3×3 en la frecuencia natural \tilde{f}/f y el factor de amortiguamiento ξ . $E_p/E_s = 10^3$, $h/b = 1, 2, 5$

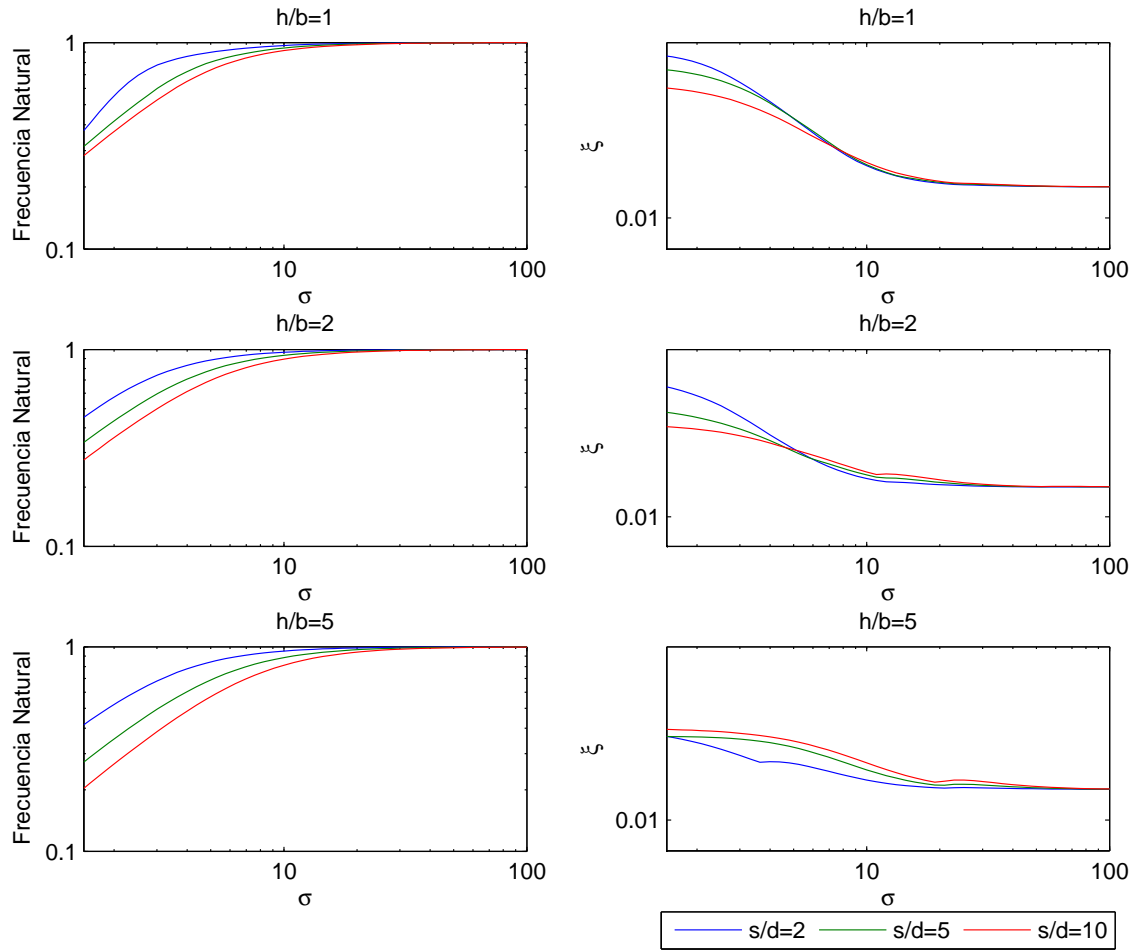


Figura 4.52: Influencia de la separación entre pilotes de un grupo de 4×4 en la frecuencia natural \tilde{f}/f y el factor de amortiguamiento ξ . $E_p/E_s = 10^3$, $h/b = 1, 2, 5$

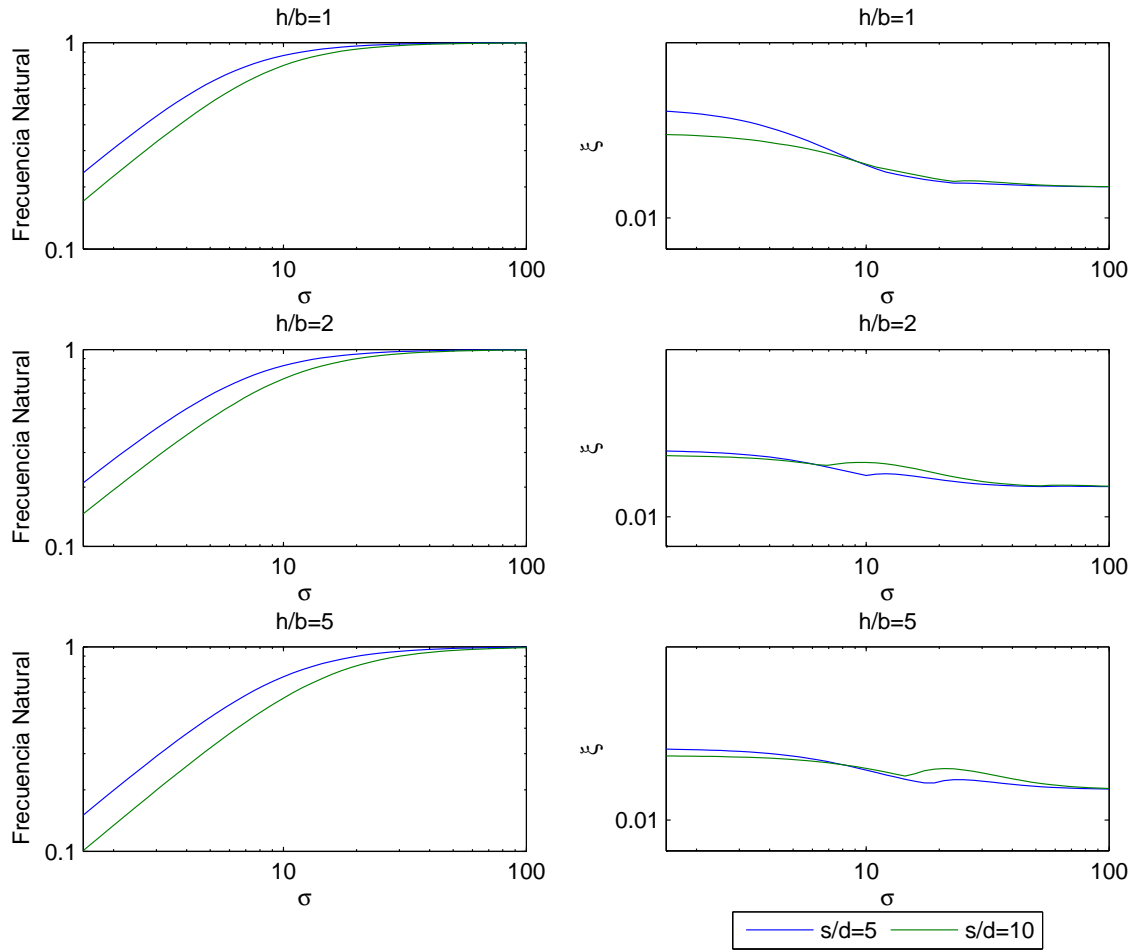


Figura 4.53: Influencia de la separación entre pilotes de un grupo de 2×2 en la frecuencia natural \tilde{f}/f y el factor de amortiguamiento ξ . $E_p/E_s = 10^2$, $h/b = 1, 2, 5$

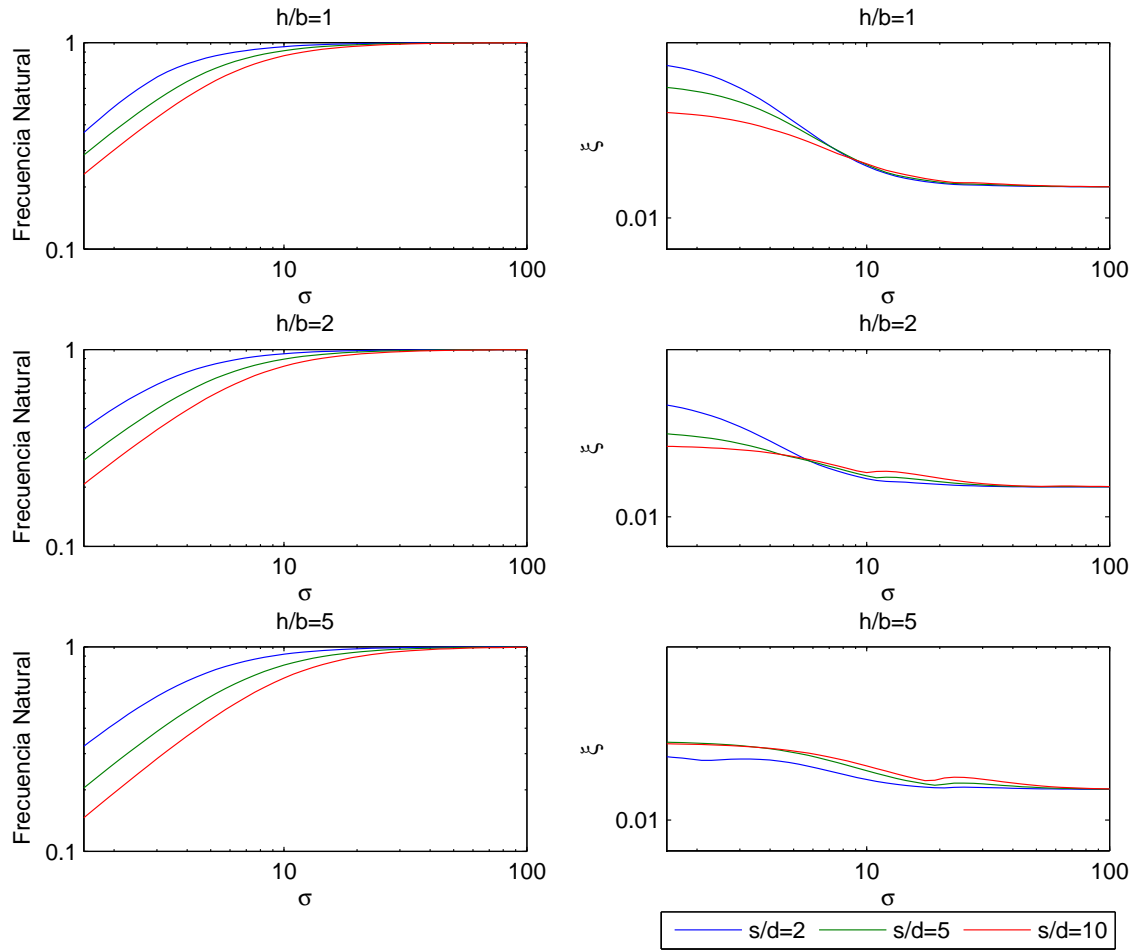


Figura 4.54: Influencia de la separación entre pilotes de un grupo de 3×3 en la frecuencia natural \tilde{f}/f y el factor de amortiguamiento ξ . $E_p/E_s = 10^2$, $h/b = 1, 2, 5$

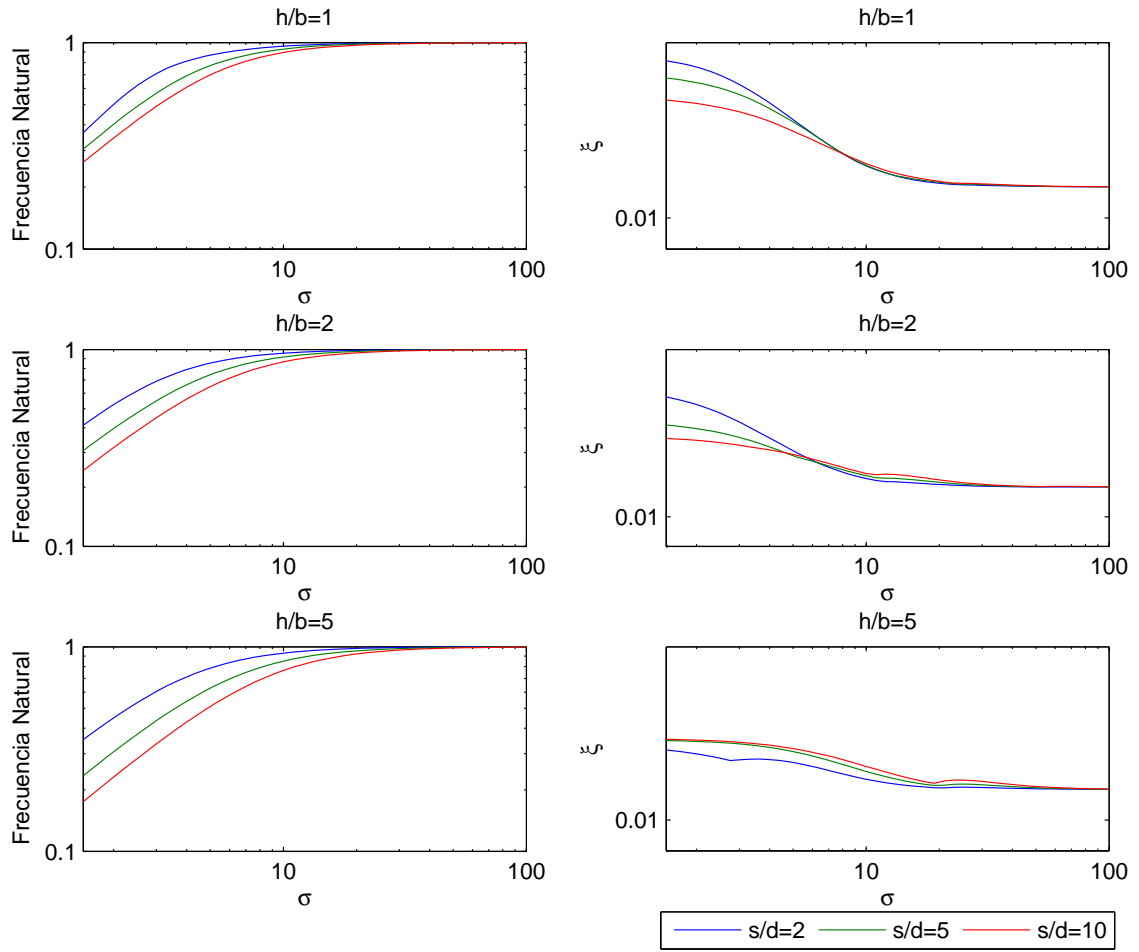


Figura 4.55: Influencia de la separación entre pilotes de un grupo de 4×4 en la frecuencia natural \tilde{f}/f y el factor de amortiguamiento ξ . $E_p/E_s = 10^2$, $h/b = 1, 2, 5$

Capítulo 5

Revisión, conclusiones y desarrollos futuros

5.1. Revisión

Se ha desarrollado un modelo simple de interacción suelo-estructura en el dominio de la frecuencia, que permite evaluar la influencia de estos factores en la respuesta de estructuras de edificación frente a cargas de origen sísmico. Se trata de un modelo basado en la metodología de subestructuración, lo cual permite realizar un mayor número estudios paramétricos debido a su menor coste computacional en comparación con los modelos directos.

En este modelo las impedancias y los factores de interacción cinemática sólo varían con la configuración geométrica de la cimentación, la disposición de los pilotes, el número de pilotes y la separación entre los mismos. Sin embargo, en el caso de los modelos directos, las impedancias y los factores de interacción cinemática dependen también de otros parámetros como el parámetro de onda σ y esto hace que tengan que ser computadas un mayor número de veces para la realización de análisis paramétricos.

En este modelo, la estructura se considera un sistema discreto con un número finito de grados de libertad, el conjunto terreno-cimentación se representa a través de resortes y amortiguadores equivalentes cuyas propiedades dependen de la frecuencia de excitación y, por último, la sollicitación (onda sísmica) a través de sus efectos (desplazamiento y giro) en la base de la estructura. El modelo permite cuantificar el efecto de la interacción sobre variables de la estructura tales como su frecuencia natural, esfuerzos y amortiguamiento.

Haciendo uso de dicho modelo se han logrado reproducir los resultados obtenidos por *Veletsos & Meek* [3] para cimentaciones superficiales, tanto en lo referente a los espectros de respuesta del sistema así como en cuanto a la cuantificación del efecto de la interacción suelo-estructura sobre variables de la estructura tales como su

frecuencia natural y su amortiguamiento.

Por otra parte, se ha analizado la sensibilidad de la respuesta al tipo de amortiguamiento de la estructura, viscoso o histerético, comprobándose que apenas se aprecian diferencias en el espectro de respuesta entre ambos casos.

Asimismo, se ha realizado un estudio de la influencia sobre la respuesta del parámetro m_o/m , que representa la relación entre la masa de la cimentación y la masa de la estructura, con el objetivo de contrastar la validez de la simplificación que adoptan muchos autores al desprestigiar la masa de la cimentación superficial en los cálculos. Los resultados de este análisis muestran que el parámetro m_o/m no afecta al valor máximo del espectro de respuesta. Del mismo modo, se observa que dicho parámetro sólo afecta al espectro de respuesta para valores de la relación p/ω , que representa el cociente entre la frecuencia natural de vibración del sistema y la frecuencia de excitación, inferiores a 0,5.

Una vez validado el modelo, se ha aplicado a estructuras de edificación pilotadas con cimentaciones de grupo de 2×2 , 3×3 y 4×4 , obteniéndose los espectros de respuesta dinámica del sistema. Para ello se han obtenido los valores de las funciones de impedancia dinámica haciendo uso de un modelo acoplado de Elementos de Contorno y Elementos Finitos (MEC-MEF) tridimensional armónico que había sido desarrollado previamente en el seno de la División de Mecánica de Medios Continuos y Estructuras del Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería. Por otra parte, se presentan los resultados de los análisis paramétricos efectuados, en los que se estudia la influencia del parámetro σ , que representa la rigidez relativa entre la estructura y el suelo, en la variación de la frecuencia de resonancia del sistema, así como en la magnitud de la respuesta máxima del mismo.

5.2. Conclusiones

Los fenómenos de interacción suelo-estructura condicionan significativamente la respuesta del sistema. Se han obtenido valores de la frecuencia y el amortiguamiento incorporando dicha interacción y se observa que existen diferencias notables con los resultados que consideran la estructura cimentada sobre una base infinitamente rígida.

Estos parámetros de interacción suelo-estructura son más determinantes en el caso de cimentaciones pilotadas que en los casos de cimentaciones superficiales o cimentaciones embebidas y dependen significativamente de la configuración de la cimentación, el número de pilotes, la separación entre pilotes y la disposición geométrica de los mismos.

Los resultados obtenidos tienen un carácter adimensional y por tanto la interpretación física de los mismos requiere de un especial cuidado y precisa de

un tratamiento específico de los datos, contemplando la influencia que todos los parámetros adimensionales tienen sobre los resultados del problema.

5.3. Desarrollos futuros

El modelo de subestructuración, propuesto en este Trabajo Fin de Máster, para el análisis dinámico de estructuras de edificación permite desarrollar una serie de análisis, entre los que pueden destacarse:

- Obtención de resultados para otros casos no estudiados en el presente trabajo, lo cual permitiría disponer de un conjunto de casos lo más generalizado posible en el que se incluyeran cimentaciones con un elevado número de pilotes.
- Estudio del rango de validez del modelo de subestructuración propuesto en comparación con el modelo directo que ya ha sido desarrollado previamente en el seno de la División de Mecánica de Medios Continuos y Estructuras del Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería.
- Realización de un estudio pormenorizado de la influencia de las impedancias cruzadas en la respuesta dinámica del sistema.
- Obtención de espectros de respuesta máxima teniendo en cuenta los fenómenos de interacción suelo-estructura.
- Análisis de la influencia en la respuesta del sistema del contacto del encepado con el terreno, en el caso de cimentaciones embebidas, así como del grado de enterramiento del mismo.
- Desarrollo de un protocolo para obtener la respuesta dinámica del sistema de manera analítica.
- Obtención de la respuesta del sistema incorporando los factores de interacción cinemática y análisis de la influencia de estos sobre la misma. En los artículos estudiados, la influencia de la interacción cinemática sobre el periodo es poco significativa. Sin embargo, se observa cierta influencia sobre el amortiguamiento del sistema.
- Realizar un estudio comparativo del comportamiento dinámico de un encepado con la geometría de cajón embebido frente a un encepado idéntico al que se le añadan pilotes.

- Incluir en el modelo directo la condición de contacto directo del encepado con el suelo.

Bibliografía

- [1] Kausel, E. and Roesset, J. M. (1974) Soil-structure interaction for nuclear containment. *Power Div. ASCE Specialty Conf*, Boulder, Colorado, pp. 469–498.
- [2] Verbic, B. and Veletsos, A. S. (1972) Impulse response functions for elastic foundations. Report SRR Report 15, Department of Civil Engineering, Rice University, Houston, Texas.
- [3] Veletsos, S. and Meek, M. (1974) Dynamic Behaviour of Building-Foundation Systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **3**, 121–138.
- [4] Domínguez, J. (1993) *Boundary elements in dynamics*. Computational Mechanics Publications & Elsevier Applied Science, Southampton, NY.
- [5] Maeso, O., Aznárez, J. J., and Domínguez, J. (2002) Effects of space distribution of excitation on seismic response of arch dams. *J Eng Mech*, **128**, 759–768.
- [6] Maeso, O., Aznárez, J. J., and Domínguez, J. (2004) Three-dimensional models of reservoir sediment and effects on the seismic response of arch dams. *Earthquake Eng Struct Dyn*, **33**, 1103–1123.
- [7] Aznárez, J. J., Maeso, O., and Domínguez, J. (2006) BE analysis of bottom sediments in dynamic fluid-structure interaction problems. *Eng Anal Bound Elem*, **30**, 124–136.
- [8] Parmelee, R. A. (1967) Building-foundation interaction effects. *J. Engng. Mech. Div., ASCE*, **93**, 131–162.
- [9] Perelman, D. S., Parmelee, R. A., and Lee, S. L. (1968) Seismic response of single-storey interaction systems. *J Struct Div, ASCE*, **94**, 2597–2608.
- [10] Parmelee, R. A., Perelman, D. S., and Lee, S. L. (1969) Seismic response of multiple-storey structures on flexible foundation. *Bull Seism Soc Ame*, **59**, 1061–1070.

- [11] Sarrazin, M. A., Roesset, J. M., and Whitman, R. V. (1972) Dynamic soil-structure interaction. *J Struct Div, ASCE*, **98**, 1525–1544.
- [12] Bielak, J. (1975) Dynamic Behaviour of Structures with embedded Foundations. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **3**, 259–274.
- [13] Wolf, J. P. (1985) *Dynamic soil-structure interaction*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [14] Todorovska, M. I. (1992) Effects of the depth of the embedment on the system response during building-soil interaction. *Soil Dyn Earthquake Eng*, **11**, 111–123.
- [15] Avilés, J. and Pérez-Rocha, L. E. (1996) Evaluation of interaction effects on the system period and the system damping due to foundation embedment and layer depth. *Soil Dyn Earthquake Eng*, **15**, 11–27.
- [16] Avilés, J. and Pérez-Rocha, L. E. (1998) Effects of foundation embedment during building-soil interaction. *Earthquake Eng Struct Dyn*, **27**, 1523–1540.
- [17] Avilés, J. and Suárez, M. (2002) Effective periods and dampings of building-foundation systems including seismic wave effects. *Eng Struct*, **24**, 553–562.
- [18] Padrón, L. A., Aznárez, J. J., and Maeso, O. (2007) BEM-FEM coupling model for the dynamic analysis of piles and pile groups. *Eng Anal Bound Elem*, **31**, 473–484.
- [19] Padrón, L. A., Aznárez, J. J., and Maeso, O. (2007) Dynamic analysis of piled foundations in stratified soils by a BEM-FEM model. *Soil Dyn Earthquake Eng*, **28**, 333–346.
- [20] Padrón, L. A., Aznárez, J. J., and Maeso, O. (2007) Dynamic stiffness of deep foundations with inclined piles. *Earthquake Eng Struct Dyn*, **39**(12), 1343–1367.
- [21] Padrón, L. A., Aznárez, J. J., and Maeso, O. (2007) Dynamic structure-soilstructure interaction between nearby piled buildings under seismic excitation by BEM-FEM model. *Soil Dyn Earthquake Eng*, **29**, 1084–1096.
- [22] Padrón, L. A., Aznárez, J. J., and Maeso, O. (2010) 3-D Boundary element - finite element method for the dynamic analysis of piled buildings. *Eng Anal Bound Elem*.
- [23] Luco, J. E. and Westmann, R. A. (1971) Dynamic response of circular footings. *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, **97**, 1381–1395.

-
- [24] Veletsos, A. S. and Wei, Y. T. (1971) Lateral and rocking vibration of footing. *J. Soil Mech. Found. Div., ASCE*, **97**, 1227–1240.
 - [25] Clough, R. and Penzien, J. (1982) *Dynamics of structures*. McGraw-Hill.
 - [26] Kaynia, A. M. (1982) Dynamic stiffness and seismic response of pile groups. Report Report R83-03, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.

